

**Mémoire présenté en juin 2023
pour l'obtention du diplôme de
Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuares**

Par : **Rilind Azemi**

Titre : **Assurance aviation : Modélisation de la sinistralité et optimisation de la réassurance**

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de la filière

Entreprise : Réunion Aérienne & Spatiale

Nom : Stéphanie Foata

Signature :



*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuares*

Directeur du mémoire en entreprise :

Nom : Stéphanie Foata

Signature :



**Autorisation de publication
et de mise en ligne sur
un site de diffusion de
documents actuariels**

*(après expiration de l'éventuel délai
de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :



Bibliothèque :

Signature du candidat



Résumé

Marqué par une grande volatilité et une incertitude dont l'étendue est importante, le marché de l'assurance aviation fait face au défi de stabilité des résultats financiers. La coassurance constitue un premier levier face aux montants importants que sont susceptibles d'atteindre certains sinistres. Un second levier, la réassurance permet de poursuivre l'objectif de la coassurance grâce aux protections proportionnelles mais agit aussi en complément de cela, en diminuant la volatilité grâce aux protections non-proportionnelles.

Par conséquent, une étude de la sinistralité, et notamment des sinistres graves, qui représentent la volatilité par laquelle est marqué le marché, est nécessaire afin d'optimiser l'utilisation de la réassurance dans un objectif de rentabilité et de diminution du couple volatilité-incertitude. Afin de mener à bien l'étude, une méthodologie et des hypothèses prenant en compte les particularités du marché mais aussi les données à disposition, sont définies. Une étude sur la fréquence des sinistres graves et la sévérité de ceux-ci, utilisant la théorie des valeurs extrêmes, est effectuée par la suite afin de donner un poids plus important à la queue de distribution de la sévérité.

Enfin, le compte de résultat construit suite à la modélisation de la sinistralité permet de tester les différents paramètres de nos couvertures de réassurance et d'ouvrir la réflexion sur l'efficacité d'une nouvelle protection.

Une approche réaliste est utilisée, tenant compte de la difficulté à coter les tranches non-travaillantes et qui a pour conséquences des frais élevés. Les résultats obtenus sont présentés et l'interprétation de ceux-ci est effectuée afin de confronter les hypothèses et proposer des pistes d'améliorations.

Mots-clés : Assurance aviation, sinistres graves, théorie des valeurs extrêmes, optimisation de réassurance.

Abstract

Characterised by high volatility and uncertainty, the insurance aviation market faces the challenge of stable financial results. Coinsurance is a first lever to the important amounts touched by some events. A second one, the reinsurance, permits to pursue the aim of the coinsurance but also acts in complement of that, by decreasing the volatility thanks to non-proportional protection.

Consequently, a study of the losses, in particular of large losses, which represent the volatility of the market, is necessary in order to optimise the use of the reinsurance with an objective of profitability and reduction of the volatility-uncertainty couple. In order to pursue this study, the methodology and assumptions, taking into account the particularities of the market but also the available data, are defined. A study of the losses frequency and severity, using the extreme value theory, is performed to give a higher weight to the tail of the severity distribution.

Finally, the income statement build as a result of the losses modelling allows us to test different parameters of our reinsurance covers and to open the question of a new cover efficiency.

A realistic approach is used, taking into account the difficulty to price the non-working layers and which results in high fees. The results obtained are presented and the interpretation is done to confront the assumptions and to suggest improvements.

Key words : Aviation insurance, large losses, extreme value theory, reinsurance optimisation

Note de synthèse

Introduction

L'assurance aviation fait partie du domaine de l'assurance des grands risques, lequel est caractérisé par un faible volume de données et une volatilité élevée, rendant ainsi l'utilisation de modèles mathématiques difficile.

Dans un contexte de prise d'ampleur de la data-science et en particulier des données de masse, l'actuariat ne cesse de se révolutionner pour répondre aux nouveaux besoins. Toutefois, même si, le secteur de l'aviation est présent depuis de nombreuses décennies dans le marché assurantiel, il se heurte à une problématique de données.

Réunion Aérienne & Spatiale (RA&S) est un des principaux intermédiaires d'assurance commercialisant des contrats Dommage et Responsabilité civile exclusivement sur des risques aériens et spatiaux. Ainsi, RA&S se doit de démontrer la solidité de ses souscriptions et son aptitude à gérer les risques Aviation et Spatial pour que les assureurs lui délèguent cette faculté à leur place. En ce sens, RA&S prend en considération le cadre réglementaire imposé aux compagnies d'assurances mandantes.

Ce mémoire a pour objectif de réaliser une optimisation du résultat financier net de réassurance, prenant en compte un dispositif de gestion des risques défini par l'entreprise, pour le risque Aviation.

De plus, une vision réaliste est adoptée tout au long de ce mémoire afin de refléter au maximum le marché de l'assurance aviation et ses particularités.

En vue de cet objectif, le contexte de l'étude est présenté brièvement.

Dans un premier temps, une modélisation de la sinistralité brute de réassurance et de coassurance est effectuée en utilisant des méthodes mathématiques (choix d'un seuil des valeurs extrêmes, calibrage de lois, modèle d'agrégation) et en effectuant des tirages stochastiques de lois aléatoires. En outre, l'impact de l'inflation passée et future est pris en compte afin de ne pas sous-estimer la sinistralité.

Dans un second temps, le mécanisme de réassurance est modélisé. Ce dernier permet au porteur

de risque de transférer une partie de ses risques à une contrepartie, un réassureur, afin de réduire ses besoins en capitaux ou bien la volatilité des sinistres. Une optimisation des paramètres de la réassurance actuelle est effectuée.

Contexte du marché et de l'activité

Avec une croissance du nombre de passagers, du nombre de vols de frets ainsi que le développement des nouvelles technologies, le secteur nécessite de plus en plus de capacité de souscription pour se protéger des risques encourus. De plus, l'interdépendance de tous ces acteurs accroît ce risque.

Le contexte de ce secteur en pleine évolution est présenté afin de prendre en compte ces particularités dans les interprétations de l'étude.

Tout d'abord, le marché de l'assurance aviation est très segmenté et les différentes lignes d'activités sont hétérogènes. Généralement, celles-ci sont rassemblées en trois lignes d'activités distinctes : Compagnies aériennes & cargos, Constructeurs & aéroports et Aviation générale. Cette hypothèse peut être caractérisée de forte vis à vis de l'homogénéité mais elle est retenue par la majorité des acteurs.

En outre, ces risques aériens présentent une forte incertitude et un historique de données faible au vu de la rareté des sinistres, impliquant la présence de tranches non-travaillantes dans les traités de réassurance, utilisés principalement pour se couvrir de la volatilité. Cela a pour conséquence une tarification forte de ces tranches et souvent "à la main", ce qui écarte la possibilité d'une optimisation de celles-ci. Dans un cadre réaliste, ces éléments seront pris en compte dans la suite de l'étude.

Finalement, le cadre réglementaire dans lequel s'inscrit l'optimisation de résultat financier est celui de Solvabilité 2, qui pose certaines bases de pilotage des compagnies d'assurances. RA&S cherche à optimiser sa réassurance dans le cadre de la gestion des risques définie dans l'ORSA, notamment avec la notion d'appétence au risque, qui introduit le niveau de risque auquel ses mandants sont prêts à faire face.

Une fois le contexte posé, la modélisation de la sinistralité est effectuée afin de construire un compte de résultat brut de réassurance.

Modélisation de la sinistralité

Dans un objectif d'optimisation du résultat financier, il est nécessaire de modéliser les coûts à charges résultants des activités d'assurances. Dans ce cadre, RA&S modélise sa sinistralité selon les caractéristiques des lignes d'activités et risques qu'elle couvre. Pour chaque ligne d'activité et à la segmentation du risque, un arbitrage est fait entre une modélisation à l'exposition et une modélisation à l'expérience. En effet, selon les données disponibles et l'homogénéité ou non dans le temps du segment, une des méthodes sera plus adéquate pour un segment particulier. La partie modélisée par

exposition sera prise en compte en tant qu'input, RA&S utilisant les résultats de ces modélisations effectuées par un prestataire externe avec lequel elle échange régulièrement, notamment pour la validation des hypothèses. Ce mémoire abordera donc principalement la modélisation par expérience.

Les données utilisées pour modéliser la sinistralité future proviennent de bases internes à RA&S et sont converties au dernier taux de change connu en USD. Historiquement, l'inflation n'est pas prise en compte dans le modèle de cette étude annuelle en raison de la difficulté d'obtenir un taux adéquat illustrant la tendance de l'inflation dans le secteur. Celle-ci se justifie par le fait que la fréquence des sinistres diminue d'année en année par une amélioration considérable de la sécurité dans l'industrie aéronautique. De ce fait, une compensation de ces deux paramètres est généralement prise en compte, ce qui est tout de même une hypothèse très forte.

Au vu du contexte économique actuel et afin de réduire les biais dans la modélisation, il a été choisi ici de modéliser ces deux indicateurs séparément. Deux versions du modèle sont modélisées : une première sans prise en compte de l'inflation, une seconde avec prise en compte de l'inflation passée et future.

L'inflation sur les sinistres historiques se base sur l'année des paiements et des provisions. Une diminution de l'inflation sur les provisions est toutefois appliquée, ces derniers prenant en compte une partie de l'inflation future par définition. De plus, une inflation future est ajoutée afin de tenir compte du contexte actuel de hausse des taux.

Une fois les données préparées, la partie des sinistres dont les montants projetés à l'ultime sont inférieurs à 10M de dollars sont considérées comme attritionnels et une projection par la méthode de Chain-Ladder est effectuée, car la qualité des données n'est pas suffisante pour utiliser des modèles plus sophistiqués.

Pour la partie des sinistres ayant une charge supérieure à 10M de dollars, la fréquence est calibrée selon deux lois usuelles (Poisson, Binomiale-Négative) et la sévérité est modélisée par un modèle à deux lois, une première loi dite « centrale » et une seconde loi dite « de queue de distribution » ayant pour objectif de donner un poids plus important aux sinistres extrêmes.

La théorie des valeurs extrêmes est introduite pour effectuer cette modélisation à deux lois, d'abord par la loi du maximum généralisé¹, puis par la distribution de Pareto généralisée². Différents estimateurs et propriétés de ces lois sont mis en avant, avant de donner des méthodes pour calibrer les paramètres.

1. GEV : *Generalized Extreme Value*

2. GPD : *Generalized Pareto distribution*

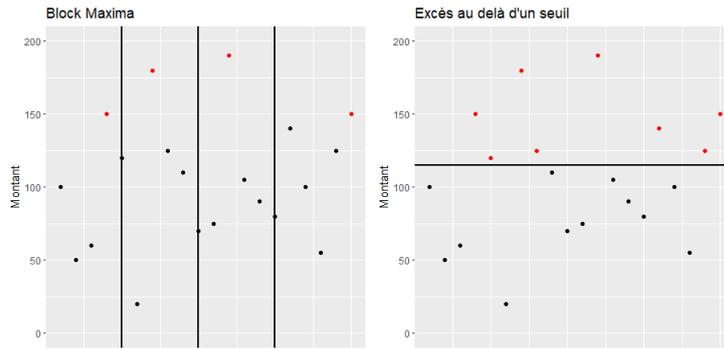


FIGURE 1 – Illustration des deux lois de la théorie des valeurs extrêmes

Le calcul des différents paramètres effectué et les tests sur les lois calibrées, permettent de justifier l'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes. En effet, la GPD apparaît dans la majorité des cas comme la meilleure loi pour la queue de distribution (satisfaisant donc la propriété de limite asymptotique).

À cette sinistralité sont ajoutés les différents frais (gestion, courtage, etc...) et les parts RA&S (sur la coassurance) sont modélisées afin d'obtenir un compte de résultat.

Cependant, ces résultats restent fragiles car la lecture graphique et les tests ne permettent pas de les affirmer avec certitude. En effet, le peu de données disponibles rend la lecture de ces outils difficile et ne permet pas dans certains cas de satisfaire des propriétés asymptotiques.

Réassurance

La Réassurance, important outil de protection pour les assureurs, permet de faire face à des risques anormalement nombreux ou à des sinistres extrêmement élevés. Elle constitue un levier pour les assureurs afin de prendre plus de risques ou mieux se protéger contre les risques existants.

Par ailleurs, la directive Solvabilité II ayant renforcé le rôle de la réassurance dans la démarche de gestion des risques, celle-ci apparaît donc de plus en plus comme un outil incontournable. En effet, la réassurance permet une diminution des exigences réglementaires de capitaux par la réduction de l'exposition aux risques ou de la volatilité.

En raison des risques extrêmes pouvant atteindre des montants très élevés par rapport à d'autres secteurs d'activité de l'assurance, l'assurance aviation nécessite donc un pilotage par la réassurance pour mutualiser ces risques très volatiles à l'échelle internationale.

Tout d'abord, le programme actuel de réassurance de RA&S, visant à céder une partie des engagements mais en sus de cela, à céder une partie de la volatilité du portefeuille, et des objectifs de rentabilité et de risque définis par les instances dirigeantes de l'entreprise dans le cadre de la fonction de gestion des risques sont présentés.

Dans le cadre de l'appétence au risque, les trois indicateurs suivants sont définis :

- La rentabilité de la souscription : le résultat technique par unité de primes brutes acquises ;
- Le risque à 200 ans : le quantile 99,5% de la distribution des pertes ;
- Le minimum de primes acquises après cession à la réassurance.

Une optimisation des paramètres tenant compte de contraintes sur ces indicateurs est effectuée. La figure ci-dessous, présentant les deux premiers indicateurs, permet d'obtenir les couples de paramètres éligibles.

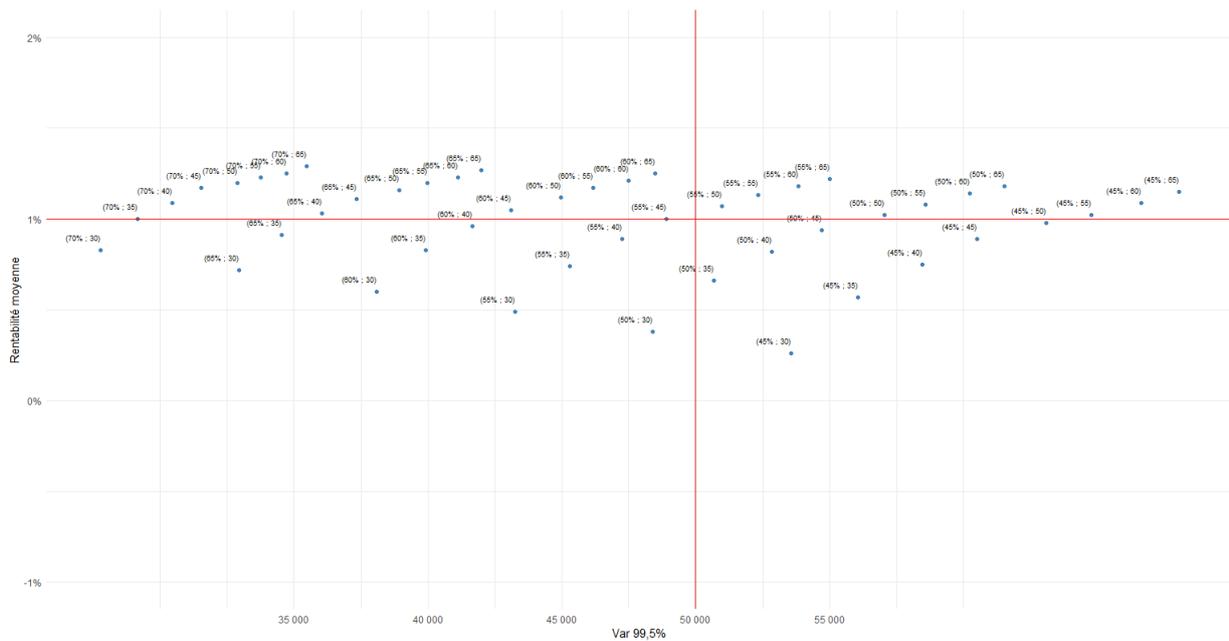


FIGURE 2 – Optimisation simultanée sur la QP et le XS

Une fois ces couples obtenus, les primes acquises nettes de réassurance sont regardées afin de ne sélectionner que les couples satisfaisant les trois indicateurs. Six couples de paramètres ont ainsi été sélectionnés dont le couple (60%, 65) qui maximise le résultat technique par unité de prime brute acquise.

Par conséquent, le programme actuel de réassurance de RA&S ressort comme prudent de l'étude et étant un bon compromis au vu de la difficulté à obtenir des protections précises sur le marché de la réassurance aviation.

Conclusion

Cette étude a permis de faire un tour de table sur l'utilisation des mathématiques dans les grands risques comme ceux de l'assurance aviation. Les difficultés de modélisation liées à ce secteur ont été présentées et un plan d'attaque a été élaboré afin de poursuivre l'objectif initial, d'optimisation de

la réassurance.

Le faible nombre de données, sans variables explicatives, ainsi qu'un grand volume de lignes d'activités en comparaison du nombre de sinistres, constituent les principaux freins à une approche mathématique de la modélisation de la sinistralité. Par conséquent, des hypothèses ont été prises afin de mener à bien la suite de l'étude.

Une fois la sinistralité modélisée, la réassurance intervient, selon les critères définis dans le cadre de la gestion des risques. Les paramètres des différentes protections de réassurances ont été challengés. Cette étape d'optimisation permet d'obtenir un couple de paramètre donnant un meilleur résultat financier tout en respectant les indicateurs de risques définis.

Executive summary

Introduction

Aviation insurance is part of the fields of great risks, which is characterised by low data volume and high volatility, making the use of mathematical models difficult.

In the context of the growing importance of data science and in particular of mass data, actuarial science is constantly being revolutionized to meet new needs. However, if aviation is one of the first sectors in history to be concerned by insurance, it is confronted with a data problem.

In the context of the growing importance of data science and, in particular, of mass data, actuarial science is constantly being revolutionized to meet new needs. However, even if the aviation sector has been present in the insurance market for many decades, the sector is facing data problem.

Réunion Aérienne & Spatiale (RA&S) is one of the main insurance intermediaries marketing damage and civil liability policies exclusively for aviation and spatial risks. Thus, RA&S must demonstrate the solidity of its underwriting and its ability to manage aviation and spatial risks so that insurers will delegate this capacity to it. In this sense, RA&S takes into consideration the regulatory framework imposed on mandators insurance companies.

This thesis aims to realize an optimisation of the net of reinsurance financial result, taking into account a risk management process defined by the company, for Aviation risk.

Moreover, a realistic vision is adopted throughout this thesis in order to reflect the aviation insurance market and its particularities.

In view of this objective, the context of the study is briefly presented.

Firstly, a model of the gross reinsurance and co-insurance losses is carried out using mathematical methods (choice of an extreme value threshold, calibration of laws, aggregation model) and by stochastic draws of random laws. In addition, the impact of past and future inflation is taken into account in order not to underestimate the loss experience.

Secondly, the reinsurance mechanism is modeled. The latter allows the risk carrier to transfer part

of its risks to a counterparty, a reinsurer, in order to reduce its capital requirements or the volatility of claims. An optimisation of the current reinsurance parameters is performed.

Context of the market and the activity

With an increase in the number of passengers, the number of cargo flights and the development of new technologies, the sector requires more and more underwriting capacity to protect itself from outstanding risks. Moreover, the interdependence of all these actors increases this risk.

The context of this sector is presented in order to take these particularities into account in the interpretations of the study.

First of all, the aviation insurance market is highly segmented and the different lines of business are heterogeneous. Usually, these are grouped into three distinct lines of business : Airlines Cargo, Aircraft Manufacturers Airports and General Aviation. This assumption can be characterized as strong with regard to homogeneity, but it is used by the majority of actors.

In addition, these aviation risks present a high degree of uncertainty and a weak data history in view of the rarity of claims, implying the presence of non-working layers in the reinsurance treaties, used mainly to cover volatility. This results in high pricing of these tranches and often "by hand", which rules out the possibility of optimising them. In a realistic framework, these elements will be taken into account in the study.

Finally, the regulatory framework for optimising financial results is Solvency 2, which presents some principles for the management of insurance companies. RA&S seeks to optimise its reinsurance within the framework of risk management defined in the ORSA, in particular with the notion of risk appetite, which introduces the level of risk that its mandators are willing to face.

Once the context has been established, the claims experience is modeled in order to construct a gross of reinsurance income statement.

Loss experience modeling

In an aim to optimise the financial result, it is necessary to model the costs resulting from insurance activities. In this context, RA&S models its claims experience according to the characteristics of the lines of business and the covered risks. For each line of business and at risk segmentation, a choice is made between exposure-based modeling and experience-based modeling. Indeed, depending on the available data and the homogeneity or not of the segment over time, one of the methods will be more appropriate for a particular segment. The part modeled by exposure will be taken into account as an input, RA&S using the results of these models carried out by an external partner with whom it regularly exchanges, in particular for the validation of the assumptions. This thesis will mainly deal with the modelling by experience.

The data used to model future claims experience comes from internal RA&S databases and is converted to the latest known USD exchange rate. Historically, inflation has not been taken into account in the model for this annual study because of the difficulty of obtaining an adequate rate that illustrates the inflation trend in the sector. This is justified by the fact that the frequency of claims is decreasing from year to year due to a considerable improvement in safety in the aviation industry. For this reason, a compensation of these two parameters is generally taken into account, although this is a strong assumption.

Because of the current economic context and in order to reduce bias in the modeling, it has been chosen here to model these two indicators separately. Two versions of the model are modeled : a first one without taking inflation into account, a second one with taking past and future inflation into account.

Inflation on historical claims is based on the year of payments and reserves. However, a decrease in inflation on reserves is applied, as reserves take into account part of the future inflation by definition. Moreover, future inflation is added for the current rising rate environment.

Once the data is prepared, the portion of claims with ultimate projected amounts of less than \$10M are considered attritional and a Chain-Ladder projection is performed, as the data quality is not sufficient to use more sophisticated models.

For the part of the claims with an incurred higher than \$10M, the frequency is calibrated according to two usual laws (Poisson, Binomial-Negative) and the severity is modelled by a two-law model, a first law called "central" and a second law called "tail", whose objective is to give a greater weight to extreme claims.

Extreme value theory is introduced to perform this two-law modeling, first by the Generalized Extreme Value (GEV) distribution, then by the Generalized Pareto distribution (GPD). Different estimators and properties of these laws are presented, before giving methods to calibrate the parameters.

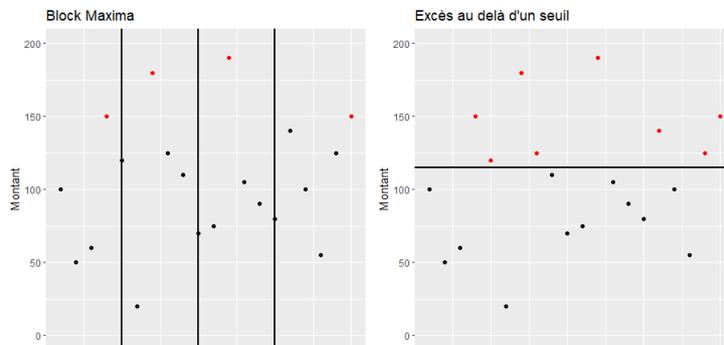


FIGURE 3 – Illustration of the two laws of the extreme value theory

The computation of the different parameters carried out and the tests on the calibrated distributions, make it possible to justify the use of the extreme value theory. Indeed, the GPD appears in most cases as the best law for the tail of the distribution (thus satisfying the asymptotic limit property).

To this loss experience are added the different expenses (management, brokerage, etc.) and the RA&S shares (on co-insurance) are modelled in order to obtain an income statement.

However, these results remain fragile because the graphical reading and the tests do not allow to affirm them with certainty. Indeed, the limited amount of data available makes it difficult to use these tools and in some cases does not allow to satisfy asymptotic properties.

Reinsurance

Reinsurance, an important cover tool for insurers, makes it possible to deal with unusually high risks or extremely high claims. It constitutes a lever for insurers to take more risks or better protect themselves against existing risks.

Moreover, since the Solvency II directive has strengthened the role of reinsurance in the risk management process, it appears more and more to be an essential tool. Indeed, reinsurance allows a reduction of the regulatory requirements of capital by the reduction of risk exposure or volatility.

Due to the fact that extreme risks can reach very high amounts compared to other insurance sectors, aviation insurance requires reinsurance to mutualize these very volatile risks on an international scale.

First of all, the current reinsurance program of RA&S, which aims to cede part of the exposition, but in addition to that, to cede part of the volatility of the portfolio, and the profitability and risk objectives defined by the risk management process are presented.

In the context of risk appetite, the three following indicators are defined :

- Underwriting profitability : technical result per unit of gross earned premiums ;
- The 200-year risk : the 99.5% quantile of the loss distribution ;
- Minimum earned premiums after cession to reinsurance.

An optimisation of the parameters taking into account these objectives is carried out. The figure below, presenting the first two indicators, allows us to obtain the eligible parameter pairs.

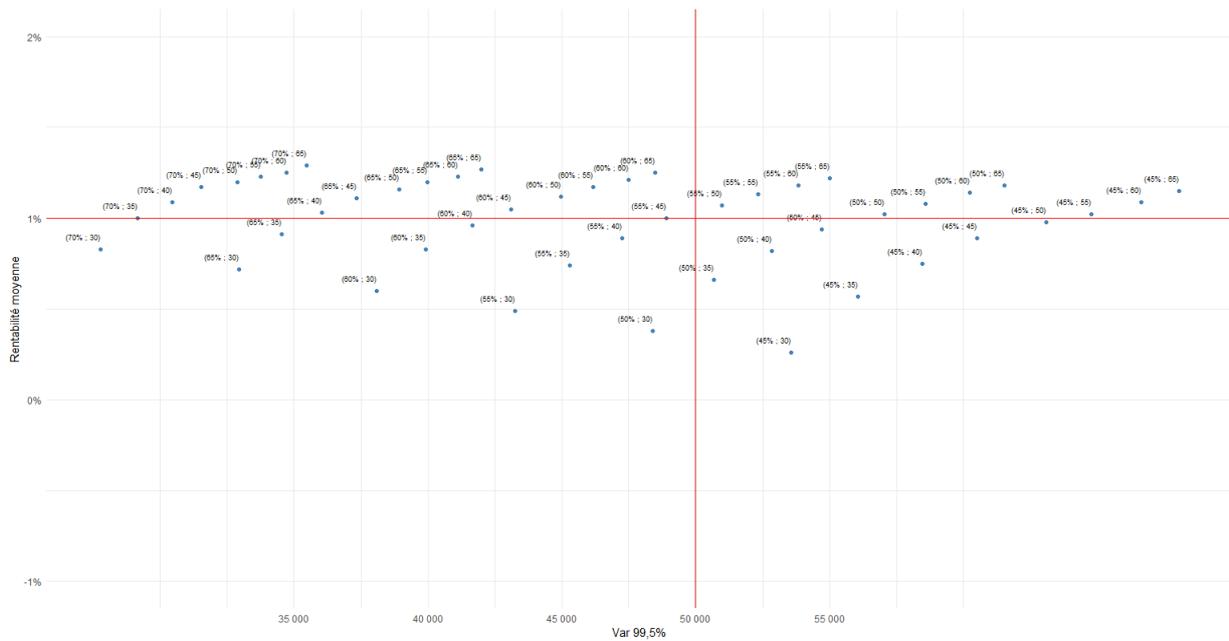


FIGURE 4 – Simultaneous optimisation on the QS and the XL

Once these pairs have been obtained, the earned premiums net of reinsurance are examined in order to select only those pairs that satisfy the three indicators. Six pairs of parameters were thus selected, including the pair (60%, 65) that maximizes the technical result per unit of gross earned premium.

As a result, the current reinsurance program of RA&S emerges from the study as prudent and a good compromise given the difficulty of obtaining accurate coverage in the reinsurance aviation market.

Conclusion

This study provided an overview of the use of mathematics in large risks such as aviation insurance. The modeling difficulties related to this sector were presented and a plan of attack was developed in order to pursue the initial objective of reinsurance optimisation.

The small amount of data, without explanatory variables, as well as a large volume of lines of business compared to the number of claims, are the main obstacles to a mathematical approach to model the loss experience. Therefore, assumptions were made in order to carry out the rest of the study.

Once the loss experience has been modeled, reinsurance is applied, according to the criteria defined in the risk management framework. The parameters of the different reinsurance covers were challenged. This optimisation step makes it possible to obtain a pair of parameters giving a better financial result while respecting the defined risk indicators.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à Stéphanie Foata, directrice Réassurance, Actuariat & Risques à La Réunion Aérienne, pour m'avoir donnée l'opportunité d'effectuer mon alternance à La Réunion Aérienne, pour son accompagnement durant cette année et les connaissances qu'elle a pu me transmettre.

Je tiens également à remercier Marie Lejeune, actuaire à La Réunion Aérienne, pour m'avoir accompagné durant cette expérience et avoir pris le temps de répondre à mes questions. Un grand merci également à toutes les personnes que j'ai pu côtoyer à La Réunion Aérienne, et qui ont contribué à rendre cette expérience agréable.

Par ailleurs, mes remerciements vont aussi à Franck Lopez et Mathieu Beuzelin (actuaire de AON solutions) pour leur aide précieuse et leur disponibilité sur ce mémoire.

Je remercie aussi Maud Thomas, ma référente académique et professeure à l'ISUP, pour sa disponibilité et ses remarques concernant mon mémoire. De façon plus générale, je remercie l'ensemble du corps enseignant de l'ISUP pour les acquis qui m'ont été enseignés durant ces trois années.

Introduction	17
1 Contexte du marché et de l'activité	19
I Modélisation de la sinistralité	23
2 Méthodologie	24
3 Données et préparations	27
3.1 Présentation des données	27
3.2 As-If de la fréquence des sinistres	28
3.3 As-If de la sévérité des sinistres	29
4 Modélisation usuelle	31
4.1 Évènements attritionnels	31
4.2 Chain-Ladder	32
4.3 Évènements graves	34
4.3.1 Estimation des paramètres	35
4.3.2 Tests d'adéquations	37
4.3.3 Fréquence	38
Lois usuelles	39
4.3.4 Sévérité	40
Lois usuelles	40
4.3.5 Prise en compte des troncatures	41
5 Théorie des valeurs extrêmes	42
5.1 Loi de valeurs extrêmes généralisée	42
5.1.1 Domaine d'attraction	43
5.1.2 <i>Block Maxima</i>	44
5.2 Méthode <i>Peak Over Threshold</i>	45
5.2.1 Estimation des paramètres de la loi GPD	46
5.2.2 Appartenance au domaine d'attraction de Fréchet ?	50
5.2.3 Détermination du seuil des valeurs extrêmes	50
6 Application : Modélisation de la sinistralité	52
6.1 Projection des attritionnels	52
6.2 Calibrage de la distribution de fréquence	53
6.3 Calibrage de la distribution de sévérité	53
6.3.1 Choix des seuils des valeurs extrêmes	53
6.3.2 Calibrage de la loi centrale	54
6.3.3 Calibrage de la queue de distribution	54
6.3.4 Modélisation des évènements graves	55
6.4 Sinistralité finale	55

II	Optimisation de la réassurance	57
7	La Réassurance comme outil de pilotage	58
7.1	Histoire de la réassurance	58
7.2	Objectifs de la réassurance	59
7.3	Marché de la réassurance	60
7.4	Différentes formes de réassurance	61
7.4.1	Formes contractuelles	61
7.4.2	Formes techniques	62
	Réassurance proportionnelle	62
	Réassurance non-proportionnelle	63
7.5	Tarifcation en réassurance non-proportionnelle	65
7.5.1	Tarifcation sur l'historique de sinistralité	66
7.5.2	Tarifcation sur l'exposition	67
7.5.3	Indicateurs d'efficacité des tranches	67
8	Application : Optimisation de la réassurance	69
8.1	Contexte et appétence au risque	69
8.2	Sensibilités sur la Quote-Part	71
8.3	Sensibilités sur l'Excédent de sinistre	72
8.4	Sensibilités simultanées sur les deux protections	74
	Conclusion	76
	Liste des figures	79
	Liste des tableaux	80
	Bibliographie	81
	Annexes	83

Introduction

Réunion Aérienne & Spatiale : L'assurance aviation

Depuis l'apparition des premiers éléments d'assurances, il y a plus de deux millénaires, à la multitude d'offres en termes de contrats d'assurances que l'on connaît aujourd'hui, le secteur a beaucoup évolué et ne cesse de se réglementer afin de répondre au besoin d'utilité social.

Le contrat d'assurance est un « contrat en vertu duquel, moyennant le paiement d'une prime, fixe ou variable, une partie, l'assureur s'engage envers une autre partie, le preneur d'assurance, à fournir une prestation stipulée dans le contrat au cas où surviendrait un événement incertain que, selon le cas, l'assuré ou le bénéficiaire a intérêt à ne pas voir réalisé. ». D'après cette définition de la Cour de Justice de l'Union européenne, ce contrat repose donc sur un principe d'aléa, ce qui donne à l'assurance la particularité d'une inversion du cycle de production, l'assureur ne connaissant pas à l'avance le coût des prestations pour lesquelles il s'engage.

Cette inversion du cycle de production, en raison de son côté incertain, oblige l'assureur à prendre des dispositions afin de gérer ses risques. Un besoin de travaux mathématiques afin d'estimer au mieux les coûts à charge est donc nécessaire.

Par ailleurs, deux types de modes de souscription concernant les contrats d'assurances sont possibles. Le premier, que l'on appelle la vente directe, désigne l'établissement du contrat par le souscripteur et la compagnie d'assurance qui prend le risque. Le second, qui est la vente intermédiée, désigne la vente du contrat par un intermédiaire (agent général, courtier, etc...) au souscripteur. Ce deuxième cas de figure est celui des contrats commercialisés par Réunion Aérienne & Spatiale (RA&S).

RA&S est un intermédiaire d'assurance et de réassurance tel que défini à l'article L. 511-1 du Code des assurances et enregistré à l'ORIAS en tant que **courtier d'assurance ou réassurance** et **mandataire d'assurance**. RA&S est spécialisé dans les risques aériens et spatiaux. Des compagnies aériennes, en passant par les industriels de l'aéronautique et du spatial mais aussi les aéroports et l'aviation générale, RA&S est présent depuis plus de 70 ans dans tous les secteurs de l'aviation et du spatial.

Le GIE La Réunion Aérienne, créée en 1953, assure la gestion (contrat, sinistres, réassurance) des contrats souscrits par RA&S.

Dans la suite, le spatial ne sera pas abordé, l'aviation étant l'objet de l'étude.

L'assurance aviation, comme son nom l'indique, a pour but d'assurer certaines personnes physiques ou morales contre des risques inhérents aux activités du secteur de l'aviation.

D'après la classification par branches définie par l'article R. 321-1 du Code des assurances, le risque Corps correspond à la branche n°5 (*Corps de véhicules aériens*) et les deux risques Responsabilité Civile correspondent à la branche n°11 (*Responsabilité civile véhicules aériens*).

Selon cette classification, RA&S commercialise exclusivement des contrats d'assurance non-vie pour une communauté d'assureurs.

Cette communauté d'assureurs composée de mandants, généralement des compagnies d'assurances, mais aussi de réassureurs prenant une part du risque dans le cadre d'un traité Quote-Part, vise à permettre la couverture de ces risques, difficilement assurables par un seul acteur.

L'étude

Dans une quête d'optimisation du résultat financier après réassurance, une étude de la sinistralité à charge des mandants et des coûts de la réassurance est nécessaire en amont, pour répondre ensuite à l'enjeu d'optimisation des différents paramètres d'un programme de réassurance.

La base de la modélisation est une étude réalisée par un des partenaires de RA&S sur la sinistralité. À partir de laquelle, certaines hypothèses seront revues et la théorie des valeurs extrêmes introduite. L'objectif est ici d'apporter de nouveaux éléments à cette modélisation afin que celle-ci corresponde plus à la réalité de l'entreprise. Ainsi, tout au long de ce mémoire, des comparaisons entre l'étude originale que l'on nommera V0 et les différentes versions modélisées seront mises en avant.

L'utilisation des outils mathématiques permettra d'atteindre les objectifs, sans toutefois se restreindre à l'aspect numérique et en veillant à garder une réflexion actuarielle.

Une remarque qui caractérisera l'étude, porte sur le fait que l'assurance aviation présente la particularité de n'avoir que très peu d'acteurs en comparaison à d'autres secteurs, comme l'assurance automobile par exemple. Par conséquent, les données disponibles sont limitées, ce qui pose une difficulté pour la modélisation. Une attention particulière sera donc accordée à l'interprétation des résultats sachant cette problématique.

Une fois la modélisation de la sinistralité effectuée, l'objectif sera d'optimiser les priorités et capacités existantes de notre programme de réassurance.

Chapitre 1

Contexte du marché et de l'activité

Avec une forte croissance du nombre de passagers, du nombre de vols de frets, le développement des nouvelles technologies très marqué ces dernières décennies et l'interdépendance de tous ces acteurs, le secteur nécessite de plus en plus de capacité de souscription pour se protéger des risques encourus.

La demande d'assurance est très élevée en comparaison de l'offre, qui est confrontée à un risque inconnu, assez récent et dont il est difficile de le quantifier. De plus, d'après des projections de Swiss Re, le nombre d'avions en circulation devrait doubler d'ici 2040, passant de 25 900 avions commerciaux à 49 600. Ceci aura pour effet d'augmenter considérablement la demande d'assurance.

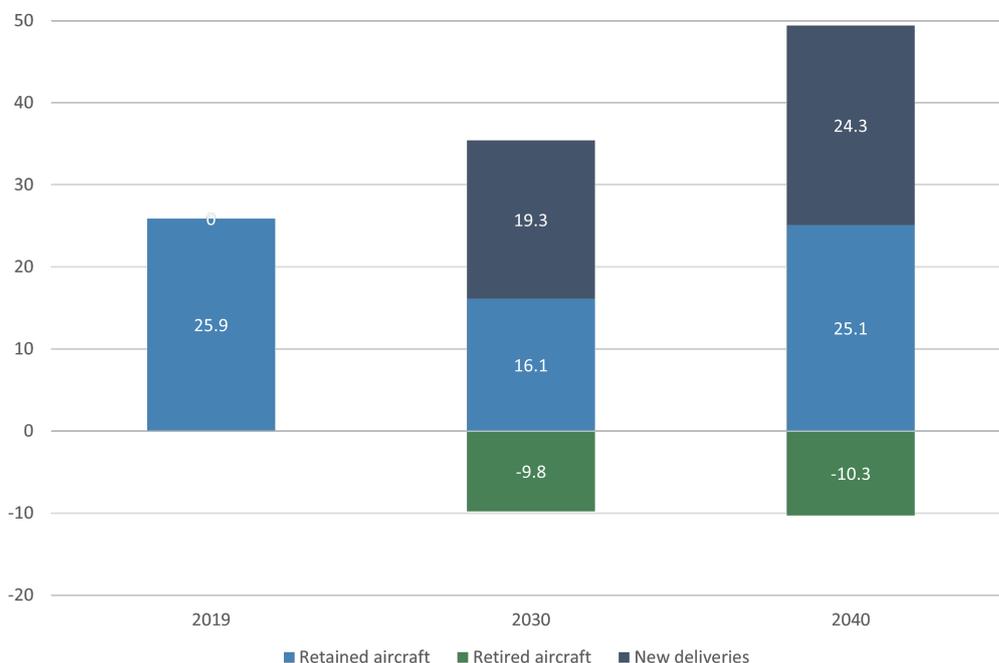


FIGURE 1.1 – Évolution du nombre d'avions - Swiss Re Institute, Economic insights

Une particularité, rendant la tâche plus compliquée pour les assureurs est le nombre de lignes d'activités que comporte le secteur aérien comme le démontre le tableau 1.1 ci-dessous. Celles-ci, dans de nombreux cas, ne comportent que très peu d'acteurs.

Aviation générale	Constructeurs & Aéroports	Compagnies aériennes
Aero-club	Aéroport	Banque
AG - Aeroport	Assistance en escale generale	Cargo
AG - Assistance en escale generale	Avionique/Electronique	Charters
AG - Autres services au sol	Avionneur	Organisme gouvernemental
AG - Catering	Avitailleur	Vols réguliers internationaux
AG - Réparation/Entretien/Maintenance	Catering	Vols réguliers nationaux
Aide industrielle	Composantes/pièces détachées	Vols réguliers régionaux
Forces armées	Conglomérats	
Transport aérien non aggravant	Matériel spatial	
Transport public de passagers	Motoriste	
Travail aérien non aggravant	Réparation/Entretien/Maintenance	
Usage privé	Vendeur	

TABLE 1.1 – Lignes d’activités

Faisant partie des premiers secteurs concernés par l’assurance, le secteur de l’aviation est néanmoins celui dont il est aujourd’hui le plus difficile de prévoir les risques liés à son activité.

La gestion quantitative des risques est donc malaisée dans ce secteur au vu des nombreuses disparités entre les acteurs et le faible nombre de ces derniers. Ainsi, un arbitrage entre l’utilisation des modèles mathématiques et les jugements à dire d’experts est nécessaire pour mener à bien l’étude.

Par ailleurs, le marché de l’assurance aviation est marqué par des primes de réassurance élevées compte tenu de l’incertitude autour des risques. Ceci a pour conséquence que les tranches soient non-travaillantes, c’est à dire, qu’elles ne soient que très rarement atteintes, entraînant donc des tarifications fortes. Ces éléments seront pris en compte dans la suite de l’étude pour une meilleure approche de la réalité.

Le cadre réglementaire

Les risques assurantiels doivent être gérés par les porteurs du risque selon la directive Solvabilité 2,

La réassurance occupe une place importante dans la réglementation Solvabilité 2 et permet de réduire les besoins en solvabilité pour les assureurs. Elle est décrite comme une technique d’atténuation des risques, qui doit être documentée et cohérente avec les politiques de gestion de l’entreprise.

La réassurance intervient aussi dans la formule standard de calcul du capital de solvabilité requis (SCR) dans les modules ”Risque de Contrepartie”, ”Risque de Souscription en Vie” et les sous-modules ”Risque de Primes et Réserves” et ”Risque catastrophique” du module ”Risque de Souscription en Non-Vie”.

Dans cette étude, bien que n’ayant pas obligation de suivre les mêmes directives qu’un assureur, la compagnie souhaite s’aligner sur le pilier relatif à l’ORSA de Solvabilité 2 dans ses objectifs de rentabilité et de réduction des risques.

Le processus de l'ORSA est rappelé, afin d'expliquer la notion d'appétence au risque et son importance au sein d'une entreprise d'assurance.

D'après l'article 45 de la Directive Solvabilité 2, « Dans le cadre de l'évaluation interne des risques et de la solvabilité (ci-après « ORSA »), l'entreprise élabore ses propres processus avec des techniques appropriées et adéquates, processus adaptés à sa propre structures organisationnelle et à son système de gestion des risques, et prenant en compte la nature, l'ampleur et la complexité des risques inhérents à ses activités. »

La figure ci-dessous permet de montrer la place de l'ORSA dans le pilier des exigences qualitatives.

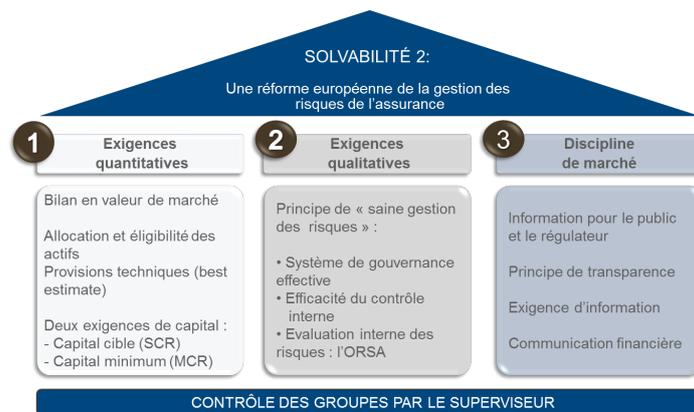


FIGURE 1.2 – Directive Solvabilité 2

D'après Jérôme Isenbart (2015) [11], le cadre du dispositif ORSA évolue autour des trois éléments suivants :

- L'évaluation du Besoin Global de Solvabilité (BGS), qui sur un horizon pluri annuel et selon l'appétit au risque de l'entreprise évoque le ratio de solvabilité réglementaire ;
- Un dispositif de gestion des risques, qui conduit à la mise en place d'indicateurs de risque ayant pour objectifs d'encadrer les décisions de gestion dans un but d'assurer le maintien des objectifs de solvabilité ;
- Une analyse Risque/Solvabilité en amont de chaque décision stratégique afin d'en mesurer les conséquences sur les indicateurs de risques.

A contrario de ce que fait le SCR, l'ORSA est un processus à un horizon pluri annuel qui met en lien la dimension stratégique de l'entreprise et les exigences réglementaires en termes de capitaux requis.

Dans le cadre du dispositif de gestion des risques, il est nécessaire pour l'entreprise de définir, selon ses objectifs, son appétence au risque. L'appétence au risque est le niveau maximal de risque que l'entreprise accepte de prendre en tenant compte de ses objectifs. Ceux-ci se déclinent souvent

sous forme de rentabilité, ratio de solvabilité et niveau de risques cible.

La définition de l'appétence au risque se définit par des indicateurs de mesures permettant à la compagnie d'adapter ses décisions stratégiques en fonction de ces indicateurs. La réassurance apparaît alors comme un outil essentiel de gestion des risques, puisqu'elle permet dans de nombreux cas d'aider l'entreprise à poursuivre ses objectifs tout en maintenant un niveau de sécurité adéquat.

L'optimisation de la réassurance s'inscrit alors comme un outil de pilotage des différents indicateurs dans le cadre de l'ORSA et permet de confronter différents scénarios afin de trouver la structure la plus adéquate pour l'entreprise, compte tenu de son appétence au risque.

Après avoir présenté le contexte de l'étude et les implications de celui-ci, notamment les problématiques liées aux données et le cadre du marché de l'aviation, la modélisation de la sinistralité est introduite. La méthodologie et les outils mathématiques usuels sont définis, puis, la présentation de la théorie des valeurs extrêmes est effectuée.

Première partie

Modélisation de la sinistralité

Chapitre 2

Méthodologie

Une modélisation de la sinistralité la plus juste possible est primordiale afin de réduire les biais lors de l'optimisation de la réassurance car la sinistralité brute influence les primes des différents programmes de réassurance ainsi que la sinistralité cédée aux réassureurs. Le résultat net de réassurance est donc fortement dépendant de la modélisation de la sinistralité. Dans un cas comme celui de l'assurance aviation, dans lequel le volume de données est limité et les montants des sinistres sont relativement élevés, cette étape a une importance majeure pour l'objectif de résultat financier.

Tout d'abord, et à contrario de ce qui se fait habituellement en modélisation de sinistralité, c'est à dire la modélisation à un niveau sinistre individuel, une approche par évènement est préférée ici. L'évènement est défini par l'agrégation des sinistres de chaque assuré concerné par l'aléa. De manière générale, concernant les lignes d'activité pour lesquelles des modélisations sur les sinistres sont effectuées, une hypothèse d'indépendance entre les différents sinistres est portée afin d'être en mesure d'utiliser les propriétés induites par l'indépendance sur les outils mathématiques. Dans le marché de l'assurance aviation, faible en nombre d'acteurs, il est fréquent que plusieurs d'entre eux aient un sinistre commun (exemple : AF 447 Rio-Paris, Airbus, Air France et Thales responsables), lequel est normé en évènement, rendant invalide l'hypothèse sur les sinistres. C'est pourquoi, il est plus adéquat de modéliser des évènements.

La modélisation de la sinistralité sera effectuée en deux étapes :

- Une première étape, très brève, concernant les évènements dits "attritionnels" pour lesquels la modélisation sera la moyenne des charges ultimes, étant donné la très grande hétérogénéité des évènements, de données non disponibles et la non-prise en compte de ceux-ci par la réassurance non-proportionnelle ;
- Une deuxième étape, consistera à modéliser les évènements dits "graves" en utilisant un modèle coût-fréquence avec deux lois afin d'approximer au mieux les informations de la queue de distribution, ces évènements représentant une part très importante de la sinistralité.

Dans la perspective de cette modélisation, il est à rappeler que la segmentation attritionnels-graves pour un évènement est définie, après projection à l'ultime, selon les limites suivantes :

- 1M pour l'Aviation Générale ;

- 10M pour les autres activités.

Ces limites sont définies par le marché de l'assurance aviation et semblent être un bon compromis par rapport à la qualité et la disponibilité des données. Quand bien même, une étude sur ces limites permettrait d'améliorer la modélisation de la sinistralité, celle-ci n'est pas judicieuse quant au réalisme de l'ensemble de l'étude. Le grand nombre d'acteurs requis pour assurer ou réassurer un risque aérien constitue un obstacle à l'élasticité de ces hypothèses.

Ensuite, la modélisation de la sinistralité grave est construite selon deux catégories : Une première catégorie, concernant les assurés les plus importants en termes d'exposition, est modélisée par exposition avec les données du marché (nombre de vols, avions, sièges remplis, coût d'indemnisation de la vie humaine) car ces derniers ne peuvent être modélisés collectivement en raison de leur grande taille et l'importance que peut avoir un changement les concernant d'une année à l'autre. À l'opposé, concernant les assurés dont la collecte de données d'exposition se révèle compliquée et ayant des profils de risques homogènes, une approche par expérience est privilégiée. La modélisation dans l'étude concerne la deuxième étape, les résultats de la première sont utilisés comme données pour le compte de résultat.

Dans un premier temps, les lignes d'activités et les segments à modéliser sont les suivants :

- Compagnies aériennes & Cargos ;
 - A : Grandes compagnies non-américaines ;
 - B : Grandes compagnies américaines ;
 - Non AB : Autres compagnies aériennes.
- Constructeurs & Aéroports ;
 - C : Grands constructeurs ;
 - Non C : Autres constructeurs & aéroports.
- Aviation générale.

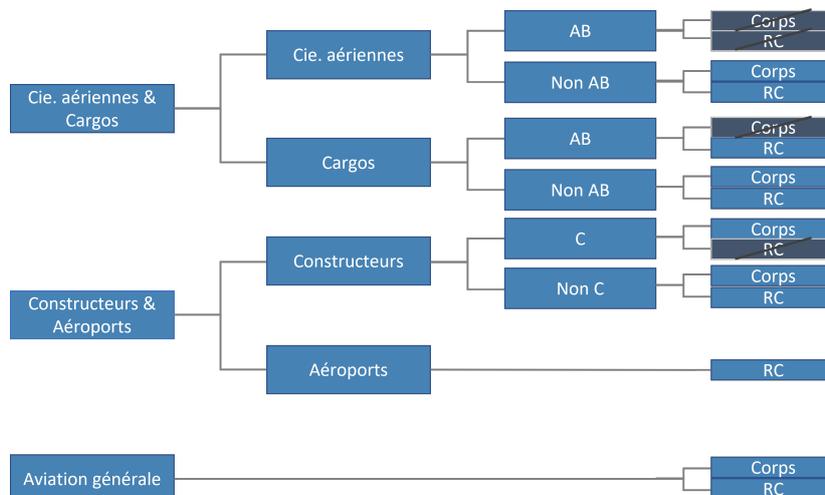


FIGURE 2.1 – En bleu, les segments concernés par l'étude de la sinistralité grave.

Le schéma ci-dessus met en évidence les segments de la sinistralité grave qui sont concernés par notre étude. Il s'agit des segments modélisés sur l'historique. Les segments en gris sont modélisés par exposition et pris en compte comme données déterministes.

Une particularité liée à la dépendance des sinistres est la concentration de deux lignes d'activités dans un évènement unique. Lorsque cela est le cas, il s'agit généralement de très grands évènements qui portent des caractéristiques communes (sévérité élevée, fréquence faible, développement longs, nombreux recours entre les deux parties). De ce fait, les évènements ayant cette particularité sont modélisés selon une ligne d'activité fictive, que l'on nommera "Combinés". Ces évènements sont ensuite redistribués de manière aléatoire entre les lignes d'activités **Compagnies aériennes & Cargos** et **Constructeurs & Aéroports** selon les pourcentages historiques.

En outre, le secteur de l'aviation est marqué par une diminution des fréquences de sinistres ces dernières années due à une amélioration considérable des procédés de prévention. De ce fait, et par la difficulté d'indexation de l'inflation sur la sévérité des sinistres, une simplification est généralement faite en omettant ces deux changements par compensation.

Le schéma suivant permet d'observer que la tendance historique pour la fréquence est la diminution de celle-ci. De plus, cette baisse s'est accentuée avec la pandémie de 2019 mais après un retour à un niveau normal, la tendance serait à un point d'équilibre.

Dimension	Historical trend	Pandemic	Short-term outlook	Long-term outlook
Claims frequency	↓	↓ ↓	↑	→
Claims severity	↑	↑	↑ ↑	↑
Passenger traffic growth	↑ ↑	↓ ↓	↑ ↑	↑
Air cargo growth	↑	↑ ↑	↓	↑
Premium rates	↓	↑	↑ ↑	→
Premiums growth	↓	↑	↑	↑

FIGURE 2.2 – Évolution du marché de l'aviation - Swiss Re Institute, Economic insights

Cependant, cette simplification induit des biais mathématiques dans le calibrage des lois de fréquence et de sévérité. Par conséquent, deux versions de la modélisation seront effectuées, une première sans indexation de l'amélioration des procédés et de l'inflation et une seconde prenant en compte ces éléments.

Le fil conducteurs et les particularités qui rythmeront cette modélisation définis, permettent de laisser place à la question des données, essentielles à une modélisation adéquate, qui initiera la modélisation.

Chapitre 3

Données et préparations

Point crucial de toute étude Statistique, la question des données constitue la base de toute modélisation mathématique. Dans ce sens, une importante partie du travail de l'actuaire consiste donc à s'assurer que les données utilisées pour effectuer les études mathématiques sont complètes, cohérentes et exactes. De plus, selon le but de l'étude, celui-ci peut être amené à effectuer des préparations sur celles-ci afin de les rendre adéquates.

3.1 Présentation des données

L'étude qui va suivre repose sur les données extraites du système de gestion interne. Ces données sont fournies sous la forme de deux bases de données, une pour les primes et une pour les sinistres.

À priori de toute transformation, les données sinistres sont transmises avec un As-If du taux de change afin de ne pas projeter l'effet de ce dernier. Ces données correspondent à une extraction au 31/12/2021 et sont exprimées en dollars américains (US\$) avec un taux de change de novembre 2021.

Les données de la base primes sont des données en norme économique, autrement dit, avec le taux de change en vigueur lors du paiement, indispensable pour la construction du compte de résultat. De plus, étant donné que seules les données de fin 2021 seront utilisées pour construire les hypothèses du compte de résultat, l'As-If du taux de change n'est pas nécessaire.

Un nettoyage des bases de données a été effectué pour agréger les observations mal rentrées dans le système informatique et appartenant aux mêmes événements. De plus, certains événements dits "exceptionnels", à l'égard des circonstances et montants par lesquels ils sont caractérisés sont retirés. Ces événements sont très éloignés en termes de caractéristiques des autres événements graves et pourraient donc induire un biais dans l'estimation des lois.

Les événements sont ainsi segmentés entre attritionnels et graves selon les critères définis jusqu'ici. Puis, les événements graves sont inflatés selon la méthode ci-dessous et projetés à l'ultime en utilisant des cadences de développement propres à la catégorie afin de prendre en compte la tendance de développement, plus longs les concernant.

Une fois la méthodologie définie et les préparations sur les données effectuées, les quatre catégories

d'évènements qui feront l'objet de l'étude sont présentées.

Tout d'abord, l'assiette de primes prise en compte pour la modélisation est celle de 2022, que l'on présente selon les trois lignes d'activités.

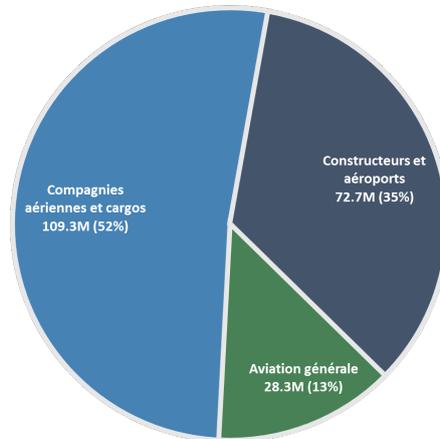


FIGURE 3.1 – Répartition des primes selon les activités en 2022.

Il est possible d'observer que les part des différentes lignes d'activités de RA&S ne sont pas homogènes. En effet, la ligne **Compagnies aériennes et cargos** représente une grande partie de l'activité avec 52% des parts, tandis que la ligne **Aviation générale** est assez faible dans le portefeuille (13%). Toutefois, au vu des montants élevés pour ces lignes, l'importance d'une bonne modélisation est cruciale pour chacune d'elles.

Par ailleurs, sur un échantillon de 2005 à 2021, les statistiques des évènements historiques sont les suivantes.

	Cie. aériennes et cargos	Constructeurs et aéroports	Combinées	Aviation générale
Nombres de sinistres	5 814	2 759	188	3 318
Moyenne	1 287 010	1 230 501	29 925 111	205 405
Ecart-type	5 286 707	10 010 037	64 554 174	1 329 069
Minimum	1 006	1 000	1 856	1 002
Maximum	163 756 295	421 633 736	552 474 977	51 954 097

TABLE 3.1 – Résumé des données sinistres par catégories de modélisation.

Un point d'attention à prendre en compte sur ces données est la grande volatilité des portefeuilles aviation. Il s'agit ici d'un point critique de notre étude, qui nécessite donc une attention particulière pour l'emploi des modèles qui seront présentés pour réduire les risques de biais.

3.2 As-If de la fréquence des sinistres

Afin de modéliser la fréquence des sinistres, il est primordial de mettre à niveau l'exposition passée par rapport à l'exposition actuelle pour réduire les biais dans la modélisation. En effet, la fréquence des sinistres étant corrélée à l'exposition à laquelle fait face la compagnie, un calcul des fréquences

avec des niveaux d'expositions différents conduirait à une mauvaise modélisation.

Des fréquences corrigées de l'exposition seront donc utilisées.

En outre, l'amélioration des procédés dans l'industrie aérienne est un élément non négligeable qui a pour conséquence de faire baisser la fréquence des sinistres. Une diminution de la fréquence par année est par conséquent appliquée en utilisant des coefficients d'amélioration dégressifs.

3.3 As-If de la sévérité des sinistres

La sévérité des sinistres, quant à elle, dépend de plusieurs paramètres comme les taux de change, le taux d'inflation ou encore les changements dans la réglementation.

Dans le cas de RA&S, une base en As-If corrigée des taux de change est fournie par le service informatique. De plus, il est supposé que l'évolution du cadre juridique sur l'historique sélectionné, ne nécessite pas de mise en As-If.

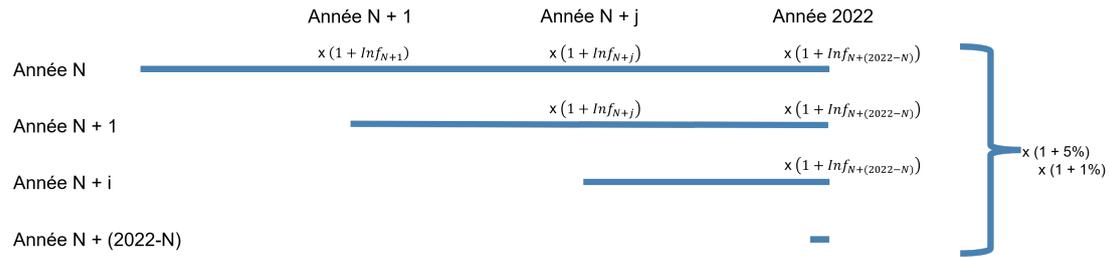
Par ailleurs, l'inflation est considérée comme un enjeu crucial à prendre en compte, d'autant plus avec le contexte économique actuel.

Ainsi, l'inflation qui est au coeur des questions actuarielles en raison de l'important impact qu'elle peut avoir sur les ordres de grandeurs à l'échelle de tout un portefeuille, a ici été un sujet de discussion, sur lequel, il a été conclu, de l'utilisation de l'indice des prix à la consommation (IPC) pour inflater paiements et provisions.

Concernant les provisions, sachant que par définition il s'agit de paiements futurs et que donc une part de l'inflation est prise en compte, il a été décidé de ne prendre en compte que la part au-dessus de 1% de l'IPC pour ne pas surinflater.

À noter, que le portefeuille de client de RA&S étant international mais concentré (notamment pour les constructeurs) sur les pays développées, l'IPC OCDE est un bon compromis, contrairement à l'IPC Monde qui a tendance à être très élevé sur les années de crises, tirés par les pays en voie de développement.

Paiements



Provisions

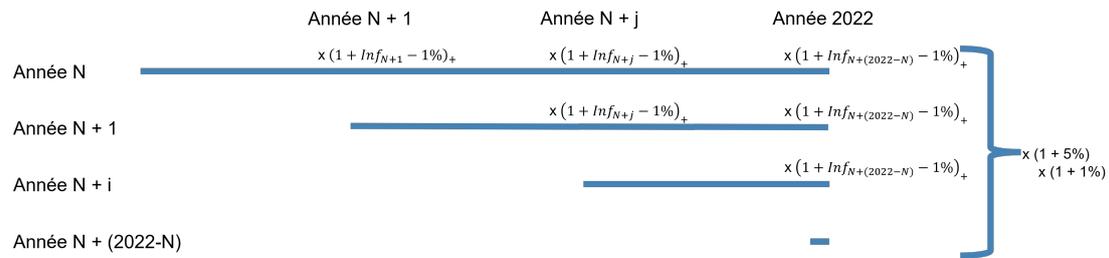


FIGURE 3.2 – Schémas descriptifs de la prise en compte de l’inflation sur la sévérité des sinistres.

Une inflation de 5% est ensuite ajoutée pour l’année 2022 de souscription puis une inflation de 1% est ajouté pour l’année 2023 étant donné la situation économique et géopolitique actuelle. Le surplus d’inflation ajouté pour l’année 2023, s’explique par le fait que les paiements correspondant à l’exercice que l’on essaye de modéliser, c’est à dire, 2023, auront lieu sur plusieurs années, or il est fortement probable que l’inflation sera plus grande que prévu en 2023. C’est pourquoi, on choisit d’ajouter 1% d’inflation correspondant à la différence entre le taux sans risque choqué à la hausse et le taux sans risque de base à maturité 10 ans, tous deux fournies par l’EIOPA à la date de juillet 2022.

Toutefois, le choix de l’indice des prix à la consommation peut être sujet à discussion. En effet, il s’agit d’un indice général prenant en compte les prix de chaque produit à la phase finale de commercialisation, or des indices plus précis de l’évolution des prix dans le marché de l’aviation ou l’évolution des coûts dans le marché assurantiel peuvent être plus adéquats. Cependant, l’assurance aviation étant un marché très particulier sur lesquels les données de ce type ne sont que très rarement disponibles, il a été décidé de prendre l’IPC qui reste tout de même cohérent selon des jugements à dire d’experts.

Les données ainsi traitées du taux de change, de l’inflation et de l’exposition, permettent d’effectuer dans la suite la modélisation de l’année d’exercice à venir, prenant en compte les évolutions dans le temps des paramètres économiques et structurels.

Chapitre 4

Modélisation usuelle

La première partie de modélisation de la sinistralité est détaillée dans ce chapitre avec notamment l'introduction des lois usuelles et la présentation des méthodes mathématiques. La deuxième et suivante partie, abordera la théorie des valeurs extrêmes.

4.1 Évènements attritionnels

La sinistralité attritionnelle est calculée comme la moyenne des années historiques projetées à leur charge ultime selon les risques. Une différence est faite ici avec la modélisation V0 qui projette les attritionnels par activités et non par risques. En effet, d'après l'ACPR (2015) [10] et concernant les directives de Solvabilité 2, il est recommandé d'effectuer la projection en utilisant des groupes de risques homogènes. De plus, les trois différents risques du portefeuille se développent différemment les uns des autres, que ce soit en termes de montant ou bien de durée de développement à l'ultime. C'est pourquoi une projection par risque est la meilleure solution, étant donné que la composante activité est moindre dans le développement des sinistres vis à vis de la composante risque.

Dans la suite, la méthode de Chain-Ladder, qui sera également utilisée pour projeter à l'ultime les évènements graves, est brièvement présentée.

Pour cette méthode, l'actuaire peut choisir de raisonner en année de souscription, année de survenance ou bien en année de déclaration.

Avant toutes choses, il est nécessaire de construire des triangles de développement, tels qu'il est possible de le voir ci-dessous (figure 4.1) et pour chaque segment de la sinistralité.

Année de développement \ Année de souscription	1	...	j	...	n
1	$C_{1,1}$		$C_{1,j}$		$C_{1,n}$
...					
i	$C_{i,1}$		$C_{i,j}$		
...					
n	$C_{n,1}$				

FIGURE 4.1 – Triangle de développement des sinistres cumulatifs

Dans l'illustration ci-dessus, sont présentées, les années de souscription en ligne, les années de développement des sinistres en colonne et les $C_{i,j}$ correspondent aux paiements/charges cumulés des sinistres.

De plus, l'actuaire a le choix entre deux types de triangles :

- **Triangle de charges**, si l'enjeu est d'éviter les différences de gestion dans les paiements et dans le cas où les segments à modéliser seraient à développement longs, ce qui pourrait rendre l'historique insuffisant pour des triangles de paiements ;
- **Triangle de paiements**, afin d'éviter la volatilité sur les provisions dossier à dossier et dans le cas où les segments seraient à développements courts, permettant ainsi d'avoir un historique fiable.

4.2 Chain-Ladder

La méthode de Chain-Ladder qui consiste à projeter les paiements est une méthode déterministe qui s'appuie sur l'hypothèse suivante concernant les facteurs de développement :

Hypothèse d'indépendance : Les facteurs de développement sont supposés indépendants de l'année d'origine i , c'est à dire pour $j = 1, \dots, n$ fixé

$$\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} := f_j \text{ pour tout } i.$$

Si l'hypothèse précédente est vérifiée alors un estimateur \hat{f}_j de f_j est :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

Cette méthode a pour objectif de reproduire la cadence de développement des sinistres passés sur les sinistres futures, faisant pour hypothèse que ces derniers se comporteront comme les sinistres passés. En effet, la méthode repose sur l'estimation des coefficients de passage d'une année

de développement à l'autre par une moyenne pondérée des coefficients de passage et applique ces coefficients successivement sur la dernière diagonale disponible, jusqu'à estimer la charge ultime de chaque exercice. Certains coefficients de développement anormalement faibles ou élevés sont retirés du triangle car jugés non représentatifs du développement des sinistres.

Par la suite, les charges ultimes calculées seront transposées par activité, afin d'être intégrées dans le compte de résultat, à partir de coefficients historiques.

4.3 Évènements graves

Les évènements graves, une fois projetés à l'ultime sont regroupés selon les quatre éléments suivants :

- Compagnies aériennes et cargos ;
- Constructeurs et aéroports ;
- Combinés : Compagnies aériennes & cargos et Constructeurs & aéroports ;
- Aviation générale.

La possibilité qu'un évènement impliquant deux assurées provenant d'une activité différente a généralement pour effet de marquer ces sinistres par une sévérité plus élevée et des caractéristiques communes. C'est pourquoi, la modélisation est effectuée comme pour une ligne d'activité à part entière.

Afin de modéliser la sinistralité des évènements graves, et au vu des données disponibles, qui sont limités, un modèle Fréquence-Coût sera utilisé, défini ci-après :

Modèle Fréquence-Coût

Un modèle probabiliste Fréquence-Coût, est un modèle qui associe indépendamment à la fréquence et à la sévérité une loi de probabilité.

Soit X , la variable aléatoire décrivant la sinistralité totale du segment.
 X est donc égale à :

$$X = \sum_{i=1}^N S_i$$

avec :

- N la loi de probabilité représentant la fréquence des sinistres sur un exercice donnée ;
- S_i suivent une loi probabilité représentant la sévérité des sinistres.

Il s'agit d'un modèle collectif qui calibre la sinistralité à l'échelle du segment et non de l'assuré. C'est pourquoi, ce modèle reste très utilisé lorsque les données à l'échelle de l'assuré sont limitées. Cette modélisation trouve ses justifications dans la faible présence de données concernant les assurées et la rareté des sinistres qui est particulière au secteur de l'assurance aviation.

De plus, la sévérité de notre sinistralité sera modélisée par deux lois, une loi dite "centrale", qui est la plus adéquate autour de la moyenne de la distribution et une loi dite de "queue de distribution" au-dessus du seuil des extrêmes, et qui permet de mieux calibrer ces évènements de sévérité extrême. La théorie des valeurs extrêmes sera présentée par la suite pour mener à bien cette modélisation.

Une condition nécessaire pour que le modèle Fréquence-Coût soit valable est que la variable de fréquence N et les variables de sévérité S_i soient indépendantes deux à deux.

4.3.1 Estimation des paramètres

Avant de se lancer dans le calibrage de la fréquence et la sévérité de la sinistralité, l'actuaire se doit de définir des estimateurs afin d'approximer au mieux les paramètres des distributions sous-jacentes aux données.

Méthode du maximum de vraisemblance

Soit X un objet aléatoire de paramètre $\theta \in \Theta$ (ouvert de \mathbb{R}). Il est supposé que X admet une densité g_θ .

On définit alors la vraisemblance de X par :

$$L_X(\theta) = g_\theta(X)$$

Ainsi, l'estimateur du maximum de vraisemblance, s'il existe, est définie par $\hat{\theta}_n \in \Theta$ vérifiant :

$$L_X(\hat{\theta}_n) = \sup_{\theta \in \Theta} L_X(\theta)$$

Dans la pratique, il peut être compliqué de maximiser la vraisemblance. C'est pourquoi, dans de nombreux cas on cherchera à maximiser la log-vraisemblance. En effet, de par la positivité de la vraisemblance et la croissance de la fonction logarithme népérien, maximiser la vraisemblance est équivalent à maximiser la log-vraisemblance (ou à minimiser l'opposé de la log-vraisemblance).

La log-vraisemblance étant donnée par :

$$l_X(\theta) = \log(g_\theta(X))$$

De manière équivalente **l'estimateur du maximum de vraisemblance**, s'il existe, est donné par $\hat{\theta}_n \in \Theta$ vérifiant :

$$l_X(\hat{\theta}_n) = \sup_{\theta \in \Theta} l_X(\theta)$$

Cas particulier : Vraisemblance d'un échantillon i.i.d.

Développons maintenant le cas particulier des définitions que l'on a émises ci-dessus, à savoir, la vraisemblance d'un échantillon $X = (X_1, \dots, X_n)$ où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) et admettant une densité f_θ pour $\theta \in \Theta$ ouvert de \mathbb{R} .

$\forall \theta \in \Theta$ on a :

La vraisemblance de X :

$$L_X(\theta) = \prod_{i=1}^n f_\theta(X_i)$$

La log-vraisemblance de X :

$$l_X(\theta) = \log\left(\prod_{i=1}^n f_\theta(X_i)\right) = \sum_{i=1}^n \log(f_\theta(X_i))$$

De ces équations découlent des formules et propriétés qui assurent la convergence des estimateurs du maximum de vraisemblance pour chacune des lois présentées par la suite.

Méthode des moments

La méthode des moments consiste à faire une transformation bijective du paramètre θ que l'on cherche à estimer en fonction des moments empiriques de la variable que l'on cherche à modéliser.

Les fondements de la méthode des moments reposent sur la proposition suivante.

Proposition : Soit Θ un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $\theta \in \Theta$. Soit φ un C^1 -difféomorphisme de Θ dans $\varphi(\Theta)$, i.e. une bijection de Θ dans $\varphi(\Theta)$, continûment dérivable et de réciproque continûment dérivable. Soit $\hat{\varphi}_n$ un estimateur consistant de $\varphi(\theta)$, alors $\hat{\theta}_n = \varphi^{-1}(\hat{\varphi}_n)$ est un estimateur consistant de θ , i.e.

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta$$

De plus, si $\hat{\varphi}_n$ est un estimateur asymptotiquement normal de $\varphi(\theta)$, i.e. s'il existe $\sigma^2 > 0$ tel que

$$\sqrt{n}(\hat{\varphi}_n - \varphi(\theta)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{L}} \mathbb{N}(0, \sigma^2)$$

et si $\varphi'(\theta) \neq 0$, alors $\hat{\theta}_n$ est un estimateur asymptotiquement normal de θ , et plus précisément

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{L}} \mathbb{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{(\varphi'(\theta))^2}\right).$$

La méthode des moments consiste d'abord à trouver une fonction φ qui satisfait les conditions précédentes et un moment d'ordre k tel que $\mathbb{E}[X_1^k] = \varphi(\theta)$

Puis, l'estimateur de ce moment s'obtient par : $\hat{m}_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$

Finalement, l'estimateur de la méthode des moments est donné par : $\hat{\theta}_n = \varphi^{-1}(\hat{m}_{n,k})$ de θ .

Pour la suite de l'étude, l'estimateur du maximum de vraisemblance sera utilisé en priorité, et lorsque cela n'est pas possible, notamment pour les lois de fréquence du fait de nombre non entiers, on utilisera l'estimateur de la méthode des moments.

De plus, pour certaines lois il n'existe pas de formules permettant de maximiser la vraisemblance,

celles-ci sont donc approchées par des algorithmes itératifs. La méthode des moments permettra d'initialiser ces algorithmes.

4.3.2 Tests d'adéquations

De plus en plus nombreux sont les outils statistiques à disposition de l'actuaire afin de mener à bien ses missions. C'est pourquoi, il est important de bien choisir des méthodes justes, pour vérifier les adéquations à des lois théoriques. Une première étape, est d'utiliser des outils graphiques afin d'avoir une idée des résultats, puis de compléter cette étude visuelle avec des méthodes numériques, tel que des tests.

Dans cette étude, les graphiques de fonction de répartition et les graphiques Quantiles-Quantiles seront utilisés comme méthodes visuelles. Afin de les compléter, les trois tests statistiques suivants seront utilisés selon les cas.

Test de Kolmogorov-Smirnov

Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test d'adéquation à une loi théorique, défini par l'hypothèse nulle suivante :

H_0 : la loi X à la même fonction de répartition F qu'une loi théorique donnée.

La fonction de répartition empirique de la loi à tester s'écrit de la manière suivante :

$$\widehat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i(\omega) \leq x}$$

Une distance est ensuite définie, la distance de Kolmogorov-Smirnov :

$$D_{KS}(F) = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \left| F\left(X_i - \frac{i}{n}\right), \left| F(X_i) - \frac{i-1}{n} \right| \right\}$$

Sous l'hypothèse H_0 , la loi de la variable de décision $D_{KS}(F, \widehat{F})$ ne dépend pas de F . On compare la valeur obtenue à une valeur critique $D_\alpha(n)$ fournie par les tables de Kolmogorov-Smirnov. Si $D_{KS} > D_\alpha(n)$, on rejette l'hypothèse H_0 avec un risque α de se tromper.

Test d'Anderson-Darling

Le test d'Anderson-Darling introduit par Stephens (1974) est un test d'adéquation très proche de celui de Kolmogorov-Smirnov, notamment, dans le calcul des distances par les fonctions de répartition.

Néanmoins, le test d'Anderson-Darling permet de mieux tester l'adéquation sur les queues de distribution en leur donnant un poids plus élevé que le test de Kolmogorov-Smirnov.

L'hypothèse nulle, comme pour Kolmogorov-Smirnov, est donnée par :

H_0 : la loi X à la même fonction de répartition F qu'une loi théorique donnée.

La distance est ensuite définie par l'équation suivante :

$$D_{AD}(F) = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1)(\ln(F(X_{i,n})) + \ln(1 - F(X_{n-i+1,n})))$$

On compare ensuite cette distance avec la valeur critique qui s'obtient simplement à partir de la fonction théorique.

Test du khi-deux

Le test du khi-deux d'ajustement est un test d'adéquation d'une variable qualitative ou quantitative discrète à une loi théorique connue, définie par :

Soit X une variable aléatoire discrète de support S_X et loi de probabilité

$$f(x_i) = \pi_i \text{ pour } x_i \in S_X$$

et considérons : $H_0 : \pi_i = \pi_{i0}$ pour chaque i $H_1 : \pi_i \neq \pi_{i0}$ pour au moins un i où π_{i0} sont des constantes connues

Le test d'ajustement du khi-deux de niveau α pour confronter ces hypothèses est de rejet H_0 si

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - T_i)^2}{T_i} \geq \chi_{k-1, \alpha}^2$$

où

$$n_i = np_i$$

$$T_i = n\pi_{i0}$$

et $\chi_{k-1, \alpha}^2$ est le point critique de niveau α pour une loi du khi-deux de paramètre $k-1$.

Ainsi, il est adéquat d'utiliser le test de Kolmogorov-Smirnov pour les variables quantitatives continues, à savoir les sévérités dans le cas de l'étude et le test du Khi-deux pour les variables quantitatives discrètes, autrement dit, pour la modélisation des fréquences. Cependant, les observations de la fréquence n'étant pas réellement des nombres entiers, en raison de la mise en As-If, il n'est alors pas possible d'utiliser le test du khi-deux. Le test de Kolmogorov-Smirnov, restant adéquat, est alors également utilisé pour les fréquences. Afin de confirmer le test de Kolmogorov-Smirnov sur les lois de queue de distribution, le test d'Anderson-Darling sera utilisé en complément.

4.3.3 Fréquence

La fréquence des sinistres, souvent difficile à modéliser (notamment lorsque les sinistres sont rares), est un élément important de la sinistralité finale et une mauvaise modélisation peut conduire à une sinistralité agrégée bien à côté de la réalité.

L'étape de mise en As-If effectuée permet de mettre en phase l'exposition passée avec l'exposition actuelle, afin de réduire les biais sur la fréquence. En effet, cette dernière est très dépendante de l'exposition sur les segments Compagnies aériennes & cargos et Constructeurs & aéroports. Concernant la ligne d'activité, Aviation Générale, le passé n'est que très peu représentatif du futur, donc la limite a été fixée à trois années historiques.

Les histogrammes ci-dessous (figure 4.2) permettent d'observer l'effet de l'indexation des sinistres par rapport à l'exposition. Il est possible de voir que selon les cas, la fréquence diminue ou bien augmente en fonction de l'exposition réelle.

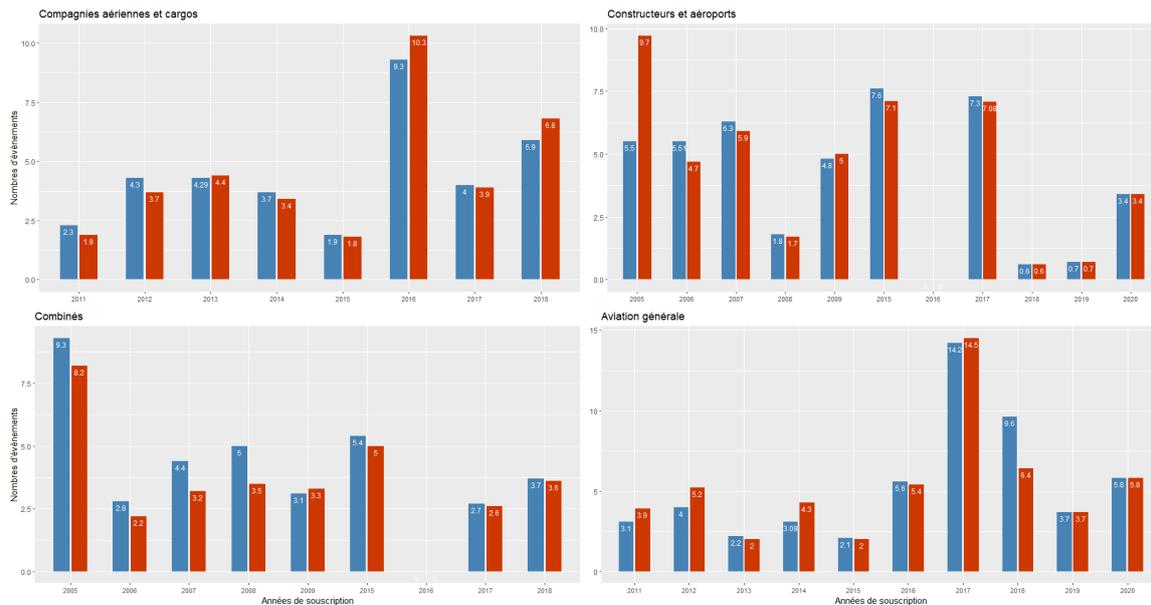


FIGURE 4.2 – Fréquence des sinistres graves par activité. Sans indexation (bleu) et avec indexation (rouge).

Cette étape permet d'avoir les fréquences de sinistres par année mises à l'échelle. Ce qui à pour conséquence de rendre ces chiffres réels. Toutefois, la modélisation se fera avec des lois discrètes car ces données se comportent comme telles. L'estimation des paramètres pour ces deux lois se fera avec la méthode des moments, l'utilisation des estimateurs du maximum de vraisemblance n'étant pas possible car il s'agit de données réelles calibrées sur des variables discrètes.

Lois usuelles

La modélisation sera testée sur les deux lois généralement utilisées pour la fréquence, la loi de Poisson et la loi Binomiale Négative.

Loi de Poisson : Une variable de comptage N qui suit une loi de Poisson $\mathbb{P}(\alpha)$, $\alpha > 0$, a pour fonction de densité :

$$p_N(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Loi Binomiale Négative : Une variable de comptage N qui suit une loi Binomiale Négative $Neg-Bin(n, p)$, $p \in [0, 1]$, $\alpha > 0$, a pour fonction de densité :

$$p_N(k) = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha)} p^k (1 - p)^\alpha \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

4.3.4 Sévérité

Une fois la fréquence modélisée, l'actuaire se doit de bien calibrer la sévérité de sa sinistralité pour pouvoir anticiper les besoins de réassurance de la compagnie. En effet, une sévérité sous-évaluée peut conduire la compagnie à prendre des protections, notamment en non-proportionnel, non suffisante à l'égard du niveau de risque accepté par l'entreprise. De l'autre côté, une sévérité surévaluée amène l'entreprise à prendre des protections qui ne lui sont pas nécessaires et qui feront donc baisser son résultat financier.

C'est pourquoi, une sévérité bien modélisée est la clé d'une bonne structure de réassurance. Dans ce sens, l'étape de mise en As-If et la projection des sinistres à l'ultime effectués en amont sont primordiales afin de réduire les biais des facteurs qui évoluent avec le temps.

Lois usuelles

Dans un premier temps, les lois qui sont généralement utilisées dans la modélisation de la sévérité sont présentées. Ces lois seront utiles pour calibrer la loi centrale de nos évènements graves.

- Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

- Loi log-normale $log - \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad x > 0$$

- Loi exponentielle $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

- Loi gamma $\Gamma(k, \theta)$, $k > 0$, $\theta > 0$:

$$f_X(x) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k)\theta^k} \quad x > 0, \Gamma \text{ est la fonction Gamma d'Euler}$$

- Loi de Pareto $P(x_m, k)$, $x_m > 0$, $k > 0$:

$$f_X(x) = k \frac{x_m^k}{x^{k+1}} \quad x \geq x_m$$

- Loi de Weibull $W(\lambda, k)$, $\lambda > 0$, $k > 0$:

$$f_X(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \quad x \geq 0$$

4.3.5 Prise en compte des troncatures

Dans un soucis de prise en compte des troncatures induites par les seuils de modélisation à gauche et à droite, il est essentiel d'effectuer des modifications sur ces lois.

Soit F une fonction de répartition d'une variable aléatoire X . La fonction de répartition de la variable $X\mathbb{1}_{g \leq X \leq d}$ tronquée à droite et à gauche $F_{g \leq X \leq}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 F_{g \leq X \leq}(x) &= \mathbb{P}(X \leq x | g \leq X \leq d) \\
 &= \frac{\mathbb{P}(g \leq X \leq \min(x, d))}{\mathbb{P}(g \leq X \leq d)} \\
 &= \frac{F(\min(x, d)) - F(g)}{F(d) - F(g)} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq g \\ \frac{F(x) - F(g)}{F(d) - F(g)} & \text{si } g \leq x \leq d \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

La fonction de répartition définissant entièrement une variable aléatoire, l'actuaire peut donc modéliser sa sinistralité avec ces nouvelles fonctions tronquées.

Dans le cas particulier de la modélisation par simulations stochastiques, la prise en compte de la troncature est possible par des méthodes empiriques. En effet, un tirage aléatoire de la distribution de sévérité peut être effectué tant que la valeur obtenue n'est pas contenue dans l'intervalle de définition de la loi tronquée.

C'est cette méthode qui sera utilisée dans l'étude en raison de sa simplicité de mise en oeuvre.

Une fois la méthodologie usuelle définie, la théorie des valeurs extrêmes, qui sera complémentaire et apportera de l'information sur la queue de distribution, sera présenté dans la suite.

Chapitre 5

Théorie des valeurs extrêmes

Jusqu'à début du XX^e siècle, la Statistique ne fournissait que très peu d'éléments pour étudier les évènements extrêmes, les principaux outils mathématiques permettant de décrire le centre de la distribution. La théorie des valeurs extrêmes définit ainsi un cadre théorique pour l'étude de la queue de distribution, autrement dit, pour les évènements extrêmes.

Cependant, en raison de la rareté de ces évènements, il peut être difficile d'interpréter les résultats obtenus. C'est pourquoi, une attention particulière à l'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes sera appliquée. Un cadre général pourra toutefois être pris si cela s'avère inadéquat.

Les deux distributions qui caractérisent les valeurs extrêmes sont présentées avant d'introduire les méthodes qui permettront d'appliquer la théorie.

5.1 Loi de valeurs extrêmes généralisée (*GEV : Generalized Extreme Value*)

Soit X une variable aléatoire ayant pour fonction de répartition F , définie par :

$$F(x) := \mathbb{P}(X_i \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Posons alors $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$, les statistiques d'ordres associées à la variable aléatoire X .

On a donc :

$$M := \max(X_1, \dots, X_n) = X_{(n)}$$

$$m := \min(X_1, \dots, X_n) = X_{(1)}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(M \leq x) = F^n(x)$$

$$\mathbb{P}(m \leq x) = 1 - (1 - F(x))^n$$

Ces deux formules étant symétriques, uniquement la loi du maximum sera étudiée, sachant que tous les résultats seront transposables à la loi du minimum sans perte de généralité.

F^n tend en loi vers une fonction dégénérée. Par conséquent, l'objectif est ici d'obtenir une trans-

formation linéaire de cette variable afin de trouver une loi limite qui ne soit pas dégénérée.

5.1.1 Domaine d'attraction

Définition : Soit G une fonction de répartition non dégénérée. Une fonction de répartition F appartient au **max-domaine d'attraction** de G , que l'on écrit $MDA(G)$, si et seulement si, il existe deux suites $(a_n) \geq 0$ et (b_n) tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x)$$

Autrement dit,

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z$$

où Z a pour fonction de répartition G .

Cette définition permet d'introduire le théorème suivant sur les extrema.

D'où le résultat suivant concernant les extrema.

Théorème : Les extrema normalisés ont une distribution limite G qui peut être seulement d'un des trois types suivants :

$$\begin{aligned} G_{1,a}(x) &:= \exp(-x^{-a}) \mathbb{1}_{x>0} && (a > 0) : \text{Fréchet} \\ G_{2,a}(x) &:= \mathbb{1}_{x \geq 0} + \exp(-(-x)^a) \mathbb{1}_{x < 0} && (a > 0) : \text{Weibull} \\ G_{3,0}(x) &:= \exp(-e^{-x}) && \forall x \in \mathbb{R} : \text{Gumbel} \end{aligned}$$

Ces trois distributions définissent donc les **domaines d'attraction**.

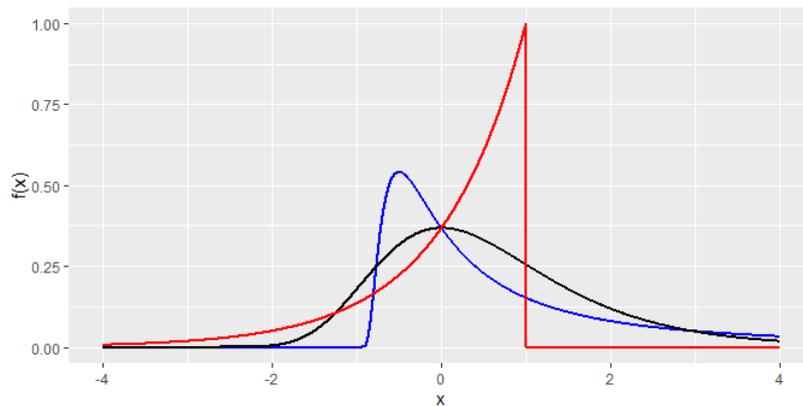


FIGURE 5.1 – Distribution des lois de valeurs extrêmes généralisées. En rouge la loi de Weibull, en noir la loi de Gumbel, en bleu la loi de Fréchet.

Ces trois distributions ont été combinées en une distribution appelée ”**Loi de valeurs extrêmes généralisée**” (**GEV**).

De plus, cette loi est définie de la manière suivante par sa fonction de répartition H :

$$H_\gamma = \begin{cases} \exp(-(1 + \gamma x)_+^{-\frac{1}{\gamma}}) & \text{si } \gamma \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

avec $x_+ = \max(0, x)$

En fonction du paramètre de forme γ , il est possible de retrouver une des trois distributions présentées précédemment.

$$\begin{cases} \gamma < 0 : \text{Weibull} \\ \gamma = 0 : \text{Gumbel} \\ \gamma > 0 : \text{Fréchet} \end{cases}$$

Une distribution de type Fréchet indique la présence d’une queue de distribution épaisse, une distribution de Gumbel fait état d’une queue légère et une distribution de Weibull caractérise la queue de distribution comme fine.

La loi des valeurs extrêmes généralisée alors définie, la méthode **Block Maxima**, la plus répandue pour modéliser la GEV sur une loi empirique, est introduite.

5.1.2 *Block Maxima*

Soit une suite d’observations indépendantes d’une loi X. La méthode Block Maxima consiste à scinder la série en blocs de n (fixé) observations et former la série des **block maxima** ($\max_{1 \leq j \leq n} X_{ij}$)_i avec le maximum de chacun des blocs i. Ainsi, cette série est utilisée pour approximer la distribution asymptotique des maximums normalisés de la distribution initial.

Bien que très utile pour prévoir des périodes de retours d’évènements très extrêmes, la GEV ne donne une information correcte que sur le maximum de la distribution. Or, dans le cas de l’assureur, il est tout aussi important d’avoir l’ensemble de la queue de distribution. Celui-ci, cherche à déterminer la distribution de la sinistralité à partir d’un seuil pour lequel les évènements sont considérées comme extrêmes et non seulement le maximum. En effet, le maximum n’apporte pas d’informations sur la dispersion des évènements extrêmes.

La figure ci-dessous permet d’illustrer ces différences entre la méthode Block Maxima et celle des excès au delà d’un seuil qui sera définie par la suite.

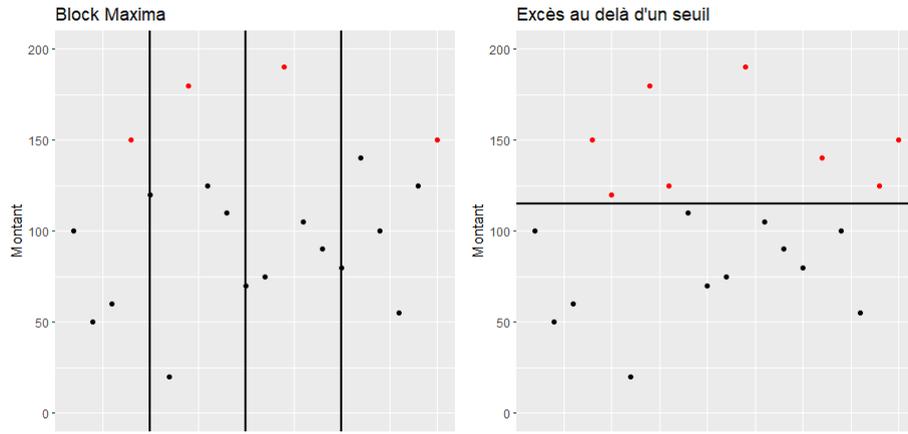


FIGURE 5.2 – Illustration des deux méthodes de la théorie des valeurs extrêmes

À noter, tout de même, que cette méthode est très dépendante du nombre d'observations initiales et du choix de la taille des blocs. Un nombre d'observations faible peut conduire à une sous-estimation de la loi du maximum.

5.2 Méthode *Peak Over Threshold (POT)* - Distribution de Pareto généralisée (GPD : *Generalized Pareto Distribution*)

Dorénavant, l'enjeu est de définir une méthode pour modéliser la queue de distribution à partir d'un certain seuil et non plus seulement le maximum.

Définition : Soit X une variable aléatoire et u un seuil fixé. La fonction de répartition des excès est la fonction de répartition de $X - u$ conditionnellement à $X > u$:

$$F_u(x) = \mathbb{P}[X - u \leq x | X > u], \quad x \geq 0.$$

Théorème de Pickands–Balkema–De Haan :

Si F appartient à un des domaines d'attraction, autrement dit, si la distribution limite du maximum de X est une GEV, alors pour u assez grand,

$$\lim_{u \rightarrow x_F^+} \sup_{0 \leq y \leq x_F^+ - u} |F_u(y) - H_{\xi, \sigma(u)}(y)| = 0$$

où $H_{\xi, \sigma(u)}$ est la distribution de Pareto généralisée (GPD), définie par :

$$H_{\xi, \sigma(u)}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{y}{\sigma(u)})^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{y}{\sigma(u)}) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

avec $\sigma(u) > 0$, $y \geq 0$ si $\xi \geq 0$ et $0 \leq y \leq -\frac{\sigma(u)}{\xi}$ si $\xi < 0$.

c'est à dire, pour un seuil u assez grand, la GPD est une bonne approximation de la fonction de répartition d'excès F_u .

Comme pour la distribution GEV, il existe trois cas en fonction de la valeur de ξ :

- $\xi > 0$: queue épaisse ;
- $\xi = 0$: queue légère ;
- $\xi < 0$: queue fine.

5.2.1 Estimation des paramètres de la loi GPD

Dans cette partie, les méthodes usuelles concernant les estimateurs de la distribution GPD et des estimateurs spécifiques à l'indice des valeurs extrêmes sont passées en revue.

Méthode du maximum de vraisemblance

Pour faire suite, à la définition de la méthode du maximum de vraisemblance, le calcul du cas particulier pour la loi de Pareto généralisée est présenté.

Comme il a été rappelé précédemment, maximiser la vraisemblance revient à maximiser la log-vraisemblance. Or, dans ce cas, maximiser la log-vraisemblance est plus aisé car les observations sont supposées indépendantes.

Deux cas sont possibles, en fonction de la valeur de ξ .

- Cas 1 : $\xi = 0$

L'expression de la log-vraisemblance s'écrit :

$$\log L(x_1, \dots, x_n, \sigma) = \sum_{i=1}^n \log H_{\xi, \sigma}(x_i) = \sum_{i=1}^n \left(-\log(\sigma) - \frac{x_i}{\sigma} \right) = -n \log(\sigma) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n x_i$$

Maximiser la log-vraisemblance revient donc à résoudre l'équation suivante :

$$-\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

On a donc comme estimateur de σ

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- Cas 2 : $\xi \neq 0$

L'expression de la log-vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} \log L(x_1, \dots, x_n, \sigma) &= \sum_{i=1}^n \log H_{\xi, \sigma}(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-\log(\sigma) + \left(-\frac{1+\xi}{\xi} \right) \log\left(1 + \xi \frac{x_i}{\sigma}\right) \right) \\ &= -n \log(\sigma) - \left(\frac{1+\xi}{\xi} \right) \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \xi \frac{x_i}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Maximiser la log-vraisemblance revient donc à résoudre les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{n}{\sigma} - \left(\frac{1+\xi}{\xi} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{-\xi x_i}{\sigma(\sigma + \xi x_i)} \right) &= 0 \\ \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \xi \frac{x_i}{\sigma}\right) - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sigma + \xi x_i} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Cependant, il n'existe pas de formules fermées solutions à ces équations. Généralement, ces solutions sont approchées par des algorithmes d'optimisation.

Méthode des moments

Toujours en reprenant la définition de la méthode des moments et le fait que les deux premiers moments théoriques s'expriment par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{\sigma}{1-\xi} \\ \mathbb{E}[X^2] &= \frac{2\sigma^2}{(1-\xi)(1-2\xi)} \end{aligned}$$

On obtient, en utilisant les moments empiriques :

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{Y}^2}{\bar{s}^2} \right) \\ \hat{\sigma} &= \bar{X} \left(\frac{1 + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{s}^2}}{2} \right) \end{aligned}$$

A noter que les moments ne sont définies que pour $k < \frac{1}{\xi}$, c'est à dire, que l'estimateur des moments pour la GPD n'est valable que si $\xi < \frac{1}{2}$.

Estimateur de Hill

Soit Z_1, \dots, Z_n un échantillon i.i.d. d'une distribution Z ayant pour fonction de répartition une fonction F tel que $1-F$ est une fonction à variation régulière d'ordre $-\alpha$, avec $\alpha > 0$.

L'estimateur de Hill, $H_{k,n}$, de l'indice de queue $\xi = \alpha^{-1}$ est donné par :

$$H_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \log\left(\frac{Z_{n-i,n}}{Z_{n-k,n}}\right)$$

et satisfait le théorème suivant :

Théorème : On suppose que les k plus grandes statistiques d'ordres, notées $k(n)$, tendent vers l'infini tel que $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

- L'estimateur de Hill $H_{k,n}$ est consistant :

$$H_{k,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \alpha^{-1}$$

- De plus, sous certaines conditions (voir annexe) :

$$\sqrt{l}(H_{k,n} - \alpha^{-1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \alpha^{-2})$$

Estimateur Quantile-Quantile

L'estimateur Quantile-Quantile, plus récemment découvert par Sidney I. Resnick et Marie F. Kratz (1995) [16] et moins usuel que l'estimateur de Hill, trouve ses origines dans la théorie du Graphique Quantile-Quantile (QQ-Plot).

Soit Z_1, \dots, Z_n un échantillon i.i.d. d'une distribution Z ayant pour fonction de répartition une fonction F tel que $1-F$ est une fonction à variation régulière d'ordre $-\alpha$, avec $\alpha > 0$.

L'estimateur Quantile-Quantile, noté $Q_{k,n}$ de l'indice de queue $\xi = \alpha^{-1}$ est donné par :

$$Q_{k,n} = \frac{\sum_{i=1}^k -\log\left(\frac{i}{k+1}\right)(k \log(Z_{n-i+1,n}) - \sum_{j=1}^k \log(Z_{n-j+1,n}))}{k \sum_{i=1}^k (-\log\left(\frac{i}{k+1}\right))^2 - (\sum_{i=1}^k -\log\left(\frac{i}{k+1}\right))^2}$$

De même que pour l'estimateur de Hill, l'estimateur-QQ satisfait les propriétés suivantes sous certaines conditions.

Théorème : On suppose que les k plus grandes statistiques d'ordres, notées $k(n)$, tendent vers l'infini tel que $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

- L'estimateur-QQ $Q_{k,n}$ est consistant :

$$Q_{k,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \alpha^{-1}$$

- De plus, sous certaines conditions (voir annexe) :

$$\sqrt{k}(Q_{k,n} - \alpha^{-1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 2\alpha^{-2})$$

Estimateur de Pickands

Estimateur valable pour les trois domaines d'attraction, il a été induit par Pickands en 1975 et se définit par la relation suivante :

$$P_{k,n} = \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{X_{(n-k_n)} - X_{(n-2k_n)}}{X_{(n-2k_n)} - X_{(n-4k_n)}}\right)$$

Théorème : On suppose que les k plus grandes statistiques d'ordres, notées $k(n)$, tendent vers l'infini tel que $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

- L'estimateur de Pickands $P_{k,n}$ est consistant :

$$P_{k,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \alpha^{-1}$$

- De plus, sous certaines conditions supplémentaires :

$$P_{k,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \alpha^{-1}$$

$$\sqrt{k}(P_{k,n} - \alpha^{-1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha^{-2}(2^{2\alpha^{-2}+1} + 1)}{4(\log 2)^2(2^{\alpha^{-1}} - 1)^2}\right)$$

Estimateur de Dekkers-Einmahl-DeHann

Egalement valable peu importe le domaine d'attraction, l'estimateur de Dekkers, Einmahl et De Hann (1989)[17] est défini par :

$$D_{k,n} = \mathcal{M}_{k_n}^{(1)} + 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\mathcal{M}_{k_n}^{(1)})^2}{\mathcal{M}_{k_n}^{(2)}}\right)^{-1}$$

Théorème : On suppose que les k plus grandes statistiques d'ordres, notées $k(n)$, tendent vers l'infini tel que $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

- L'estimateur de DEH $D_{k,n}$ est consistant :

$$D_{k,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \alpha^{-1}$$

- De plus, sous certaines conditions supplémentaires :

$$D_{k,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \alpha^{-1}$$

$$\sqrt{k}(P_{k,n} - \alpha^{-1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

avec :

$$\sigma^2 = \begin{cases} 1 + \alpha^{-2} & \text{si } \alpha^{-1} \geq 0 \\ (1 - \alpha^{-1})^2(1 - 2\alpha^{-1})\left(4 - 8\frac{1-2\alpha^{-1}}{1-3\alpha^{-1}} + \frac{(5-11\alpha^{-1})(1-2\alpha^{-1})}{(1-3\alpha^{-1})(1-4\alpha^{-1})}\right) & \text{si } \alpha^{-1} < 0 \end{cases}$$

5.2.2 Appartenance au domaine d'attraction de Fréchet ?

Une question qui se pose avant l'utilisation des estimateurs définis et des méthodes pour choisir un seuil que l'on verra ci-après est l'appartenance ou non de la variable à modéliser au domaine d'attraction de Fréchet. En effet, certains estimateurs ne sont valables que pour des lois issues de ce domaine et donc une vérification est primordiale avant toute interprétation de ces estimateurs.

Une solution pour cela est un graphique Quantile-Quantile Pareto. D'après Sidney I. Resnick et Marie F. Kratz (1995) [16] dans le cheminement qui mena à la découverte de l'estimateur QQ, si une distribution sous-jacente suit une loi de Pareto ($\alpha > 0$), alors sachant qu'une transformation logarithmique permet d'obtenir une distribution exponentielle, les points suivants devraient se situer sur une droite d'origine 0 et de pente α^{-1} :

$$\left\{ \left(-\ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right), \ln Z_{i,n} \right), 1 \leq i \leq n \right\}$$

En rappelant qu'une distribution de Pareto appartient au domaine d'attraction de Fréchet, il est possible de savoir si la distribution de la sinistralité possède une queue plus épaisse qu'une loi de Pareto. Dans ce cas, il est fort probable que la distribution appartienne au domaine d'attraction de Fréchet.

Remarque : Il suffit de regarder la forme de la queue de distribution dans le graphique QQ. Une concavité au niveau de queue indique que celle-ci est plus épaisse que pour une Pareto. A l'inverse une convexité, indique que celle-ci est plus fine et donc aucune conclusion ne peut être tirée.

5.2.3 Détermination du seuil des valeurs extrêmes

Graphique des excès moyens (*MEP : Mean Excess Plot*)

Le Graphique des excès moyens est l'outil de plus utilisé pour choisir un seuil des valeurs extrêmes. Cependant, il apporte aussi une information sur l'appartenance au domaine d'attraction de Fréchet, ce qui peut être un outil complémentaire au Pareto QQ-Plot défini précédemment.

Définition : Soit X une variable aléatoire. On définit alors la fonction des excès moyens par :

$$e(u) = \mathbb{E}[X - u | X > u]$$

Cette fonction ainsi définie, la construction du MEP et ses utilisations sont présentées.

Le principe est de tracer les points $(X_{k,n}, e_n(X_{k,n}))$ où $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ sont les statistiques d'ordres des $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $e_n(u)$ est la fonction empirique des excès moyens.

En effet, supposons qu'une partie de la distribution au dessus d'un seuil u est une GPD. Alors la fonction des excès moyens $e(v)$, pour tout $v > u$, est une fonction linéaire, de pente $\frac{\xi}{1-\xi}$.

Graphiquement, à partir d'un point u pour lequel la fonction des excès moyens est une semi-droite croissante alors ce point u est un bon choix pour le seuil des valeurs extrêmes.

Estimateur de l'indice des valeurs extrêmes et méthode graphique

Une autre méthode pour choisir l'indice des valeurs extrêmes est de représenter l'inverse des estimateurs calculés en fonction des numéros de statistiques d'ordres, autrement dit, les points :

$$\{(k_n, \hat{\xi}_{k_n}), 1 \leq k_n \leq n\}$$

Le nombre de statistiques d'ordres à retenir s'obtient en repérant l'endroit sur le graphique pour lequel la courbe se stabilise horizontalement.

Une fois le processus de la modélisation présenté et les méthodes théoriques et empiriques définies, l'application est effectuée par la suite.

Chapitre 6

Application : Modélisation de la sinistralité

Après avoir défini la méthodologie et la théorie sous-jacente à notre modélisation, l'application est effectuée sur les données traitées. Les graphiques et autres outils visuels sont présentés en annexe.

6.1 Projection des attritionnels

Tout d'abord, la sinistralité attritionnelle est projetée selon les méthodes définies précédemment et par risques (Corps, RC Transporteur, RC Produit).

De plus, dans le cas de RA&S, les triangles sont construits en tenant compte de l'année de souscription, autrement dit, un sinistre est rattaché à l'année à laquelle la police dont il fait référence à été souscrite.

Une fois ces triangles projetés, des coefficients de passage sont appliqués afin d'obtenir les résultats par activités.

À noter que les coefficients de passage sont construit en prenant en compte l'historique des sinistres attritionnels.

	Cpie. aériennes & cargos			Constructeurs & aéroports			Aviation générale			Total		
	V0	Sans Ind.	Ind.	V0	Sans Ind.	Ind.	V0	Sans Ind.	Ind.	V0	Sans Ind.	Ind.
Moyenne 100%	541,1	614,54	623,39	333,4	253,04	256,40	17,4	15,81	15,92	891,9	883,39	895,71
Moyenne LRA	37,9	43,02	43,64	20,1	15,26	15,46	7,8	7,11	7,15	65,8	65,38	66,25

TABLE 6.1 – Charge modélisée de la sinistralité attritionnelle (en millions de dollars).

Il est possible de remarquer dans le table 6.1 que la version sans indexation de l'inflation est très légèrement supérieure à la V0, également non indexée. Cependant, la répartition des charges entre les activités diffère de façon non négligeable pour les lignes d'activités "Compagnies aériennes & cargos" et "Constructeurs & aéroports". Par conséquent, la projection par risque en lieu et place d'une projection par activité a un impact important. Toutefois, une part de ces différences peut être expliquée par les biais induits par les coefficients de passages : risques à activités.

La prise en compte de l'inflation a d'importantes conséquences sur le montant estimé pour les attritionnels et donc sur le compte de résultat.

6.2 Calibrage de la distribution de fréquence

Dans la démarche de modélisation des sinistres graves, la fréquence est calibrée selon la théorie décrite dans les chapitres précédents et déclinée sous la forme ci-après.

Pour chacune des activités et afin de calibrer la distribution de la fréquence avec une loi théorique, les graphiques Quantiles-Quantiles associés aux deux distributions introduites sont visualisés afin d'obtenir une première idée de la loi sous-jacente, puis la décision est prise à partir d'un test de Kolmogorov-Smirnov.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Segment	Distribution V0	Distribution "Sans ind."	Distribution "Ind."
Compagnies aériennes et cargos	N-Binom(3,67 ; 0,85)	Poisson(4,46)	Poisson(4,53)
Constructeurs et aéroports	N-Binom(3,13 ; 0,45)	N-Binom(4,08 ; 0,49)	Poisson(4,17)
Combinés	N-Binom(2,99 ; 0,60)	Poisson(4,04)	Poisson(3,51)
Aviation générale	N-Binom(2,93 ; 0,35)	Poisson(5,34)	Poisson(5,32)

TABLE 6.2 – Résultats du calibrage de la fréquence

En comparant les résultats obtenus avec la version originale, une observation peut être faite sur le fait que la loi initialement modélisée est la même uniquement pour la ligne "Constructeurs et aéroports", le calibrage des fréquences indique que la loi de Poisson est une meilleure approximation pour les autres lignes d'activités. Cela s'explique en partie par la sélection des années prises en compte qui diffère légèrement et donc par les modifications que cela peut engendrer du fait d'un faible nombre d'observations.

De plus, l'effet de la prise en compte de l'inflation sur la fréquence des sinistres graves est évident.

Les résultats obtenus sont préférés à la version originale car le choix de prise en compte des années de souscription est le plus réaliste.

6.3 Calibrage de la distribution de sévérité

Afin de calibrer les lois sur la sinistralité du portefeuille de RA&S, la démarche consiste d'abord à obtenir le seuil des valeurs extrêmes puis modéliser les deux lois, en dessous et au-dessus de ce seuil.

6.3.1 Choix des seuils des valeurs extrêmes

La sélection du seuil des valeurs extrêmes a été effectuée en plusieurs étapes afin de diminuer l'incertitude sur ce choix. Tout d'abord, le graphique Quantiles-Quantiles de Pareto a permis d'obtenir

une première idée du domaine d'attraction. Puis, un graphique MEP a été utilisé pour confirmer ou non le premier choix et obtenir dans le cas positif un intervalle pour le seuil.

Sachant la volatilité de ces méthodes au vu du peu de données disponibles, ces observations ont été complétées en représentant graphiquement les résultats de la méthode de Hill et la méthode DEH.

Finalement, le choix final se fait en regardant numériquement dans l'intervalle choisi le seuil qui convient le mieux.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Activité	Seuil V0	Seuil "Sans ind."	Seuil "ind."
Compagnies aériennes & cargos	25 000 000	15 500 000	19 600 000
Constructeurs & aéroports	25 000 000	20 900 000	18 000 000
Combinés	60 000 000	20 200 000	23 100 000
Aviation générale	10 000 000	1 900 000	2 100 000

TABLE 6.3 – Résultats du choix des seuils à l'aide de la TVE

Les lignes d'activités **Combinés** et **Aviation générale** présentent des seuils considérablement différents des seuils usuels. Cela s'expliquant notamment par une méthode de sélection initiale "à la main", se caractérisant par une sélection graphique comme définie dans la présentation de la théorie des valeurs extrêmes. Par ailleurs, l'impact de l'inflation est visible mais relativement faible. Pour une majorité des lignes d'activités (Compagnies aériennes & cargos, Combinés et Aviation générale), le seuil augmente avec l'indexation dû à des montants de sinistres plus élevés. Toutefois, pour la ligne d'activité "Constructeurs & aéroports" le seuil diminue légèrement. Ces différences sont dues à la sévérité des sinistres et leur distribution autour du seuil modifiés avec l'indexation.

6.3.2 Calibrage de la loi centrale

La loi centrale est dans un premier temps calibrée. Une représentation des fonctions de répartition et des graphiques Quantiles-Quantiles est utilisée comme outil visuel. Le test de Kolmogorov-Smirnov, permet ensuite de confirmer les résultats numériquement.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Branche	Distribution V0	Distribution "Sans ind."	Distribution "Ind."
Compagnies aériennes & cargos	Log-N	Weibull(12 620 691; 5,14)	Weibull(15 021 418; 4,24)
Constructeurs & aéroports	Log-Logistic	N(11 895 885; 6 181 660)	N(13 646 775; 3 718 826)
Combinés	Weibull	N(11 810 554; 6 404 125)	Gamma(5,64; 1 778 712)
Aviation générale	Pareto	Log-N(14,10; 0,24)	Log-N(14,17; 0,25)

TABLE 6.4 – Résultats du calibrage de la loi centrale

6.3.3 Calibrage de la queue de distribution

D'après la théorie abordée plus tôt dans ce mémoire, la GPD serait la meilleure approximation au dessus du seuil des extrêmes. Cependant, ces résultats sont asymptotiques et donc peuvent ne

pas correspondre à nos distributions compte tenu du faible nombre de données. Une vérification est effectuée avec les tests de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson-Darling.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Branche	Distribution V0	Distribution "Sans ind."	Distribution "Ind."
Compagnies aériennes & cargos	Weibull	GPD(0,27; 14 098 510)	GPD(0,38; 14 324 340)
Constructeurs & aéroports	Weibull	GEV(35 449 150; 16 006 030; 0,59)	GPD(0,22; 25 604 740)
Combinés	Weibull	GPD(-0,076; 63 620 170)	GPD(0,13; 63 603 050)
Aviation générale	Weibull	GPD(0,48; 2 288 753)	GPD(0,48; 2 609 927)

TABLE 6.5 – Résultats du calibrage de la queue de distribution

Il est possible d'observer que pour l'activité **Constructeurs & aéroports**, la distribution GEV approxime mieux la queue de distribution que la GPD. Cela étant probablement dû au faible nombre de données à disposition. En effet, il s'agit d'une activité pour laquelle un arrêt des souscriptions avait été mis en place sur plusieurs années tel qu'expliqué au début de l'étude, impliquant des données manquantes correspondants à ces exercices.

6.3.4 Modélisation des évènements graves

En résumant, la modélisation des sinistres graves permet d'obtenir les résultats suivants :

Branche	Modélisation V0	Modélisation "Sans ind."	Modélisation "Ind."
Compagnies aériennes et cargos	239,3	317,5	426,0
Constructeurs et aéroports	163,3	184,1	241,8
Aviation générale	20,9	24,8	29,4

TABLE 6.6 – Charge modélisée de la sinistralité grave (en millions de dollars).

6.4 Sinistralité finale

L'agrégation des résultats obtenus lors des différentes étapes et le lancement de l'outil de modélisation par tirage aléatoire permettent d'obtenir la sinistralité totale à 100%.

Branche	Modélisation V0	Modélisation "Sans ind."	Modélisation "Ind."
Compagnies aériennes & cargos	1 471,8	1 676,8	1 839,4
Constructeurs & aéroports	647,6	642,2	746,9
Aviation générale	39,2	42,4	48,3

TABLE 6.7 – Charge modélisée de la sinistralité grave (en millions de dollars).

Les ordres de grandeurs entre chaque activité restent sensiblement les mêmes. Cependant, à l'intérieur de celles-ci nos modélisations sont plus conservatives.

De plus, l'effet de l'indexation des sinistres sur l'inflation semble être considérable.

Par ailleurs, des parts moyennes sont appliquées sur la sinistralité à 100% pour obtenir les montant à la part RA&S, afin de pouvoir modéliser l'optimisation de la réassurance.

Les résultats sont les suivants :

Branche	Modélisation V0	Modélisation "Sans ind."	Modélisation "Ind."
Compagnies aériennes & cargos	102,9	117,5	129,3
Constructeurs & aéroports	37,9	37,7	44,4
Aviation générale	12,9	13,5	15,0

TABLE 6.8 – Sinistralité modélisée du portefeuille à la part LRA (en millions de dollars).

La première partie de cette étude a contribué à introduire le contexte de l'assurance aviation et d'expliquer les particularités auxquelles font face les actuaires de RA&S. De plus, un cadre de modélisation de la sinistralité a été présenté et appliqué avec en particulier la prise en compte de la théorie des valeurs extrêmes pour donner un poids plus important à la queue de distribution des sinistres.

Cette étape dernière étape clôture ainsi la modélisation de la sinistralité et a permis d'obtenir un compte de résultat net de coassurance et brut de réassurance. Dans la prochaine étape, la réassurance sera présentée, puis, la question de l'optimisation abordée.

Deuxième partie

Optimisation de la réassurance

Chapitre 7

La Réassurance comme outil de pilotage

La réassurance qui se présente comme l'assureur de l'assureur est un outil de protection important pour une compagnie d'assurance, qui est amenée à faire face à de nombreux risques ou à des risques extrêmes. La réassurance a pour objectif de diminuer les risques auxquels fait face l'assureur mais apporte un nouveau risque, généralement moindre, à l'assureur : le risque de contrepartie. Il s'agit du risque qu'un des réassureurs fasse défaut et ne puisse pas honorer ses engagements.

De son côté, le réassureur se comporte comme un deuxième volet de mutualisation des risques en acceptant différents risques et ceci à l'échelle internationale et sur plusieurs années. La tarification en réassurance, étant différente du secteur assurantiel, sera abordée par la suite afin de donner une prime aux couvertures non-proportionnelles.



FIGURE 7.1 – Schéma descriptif du transfert de risques.

7.1 Histoire de la réassurance

L'histoire de la réassurance commence avec une toute première transaction entre deux assureurs, l'un cédant une partie de ses engagements sur un bateau et sa cargaison à l'autre au *XVII^e* siècle.

La réassurance restera ensuite sous cette forme simple jusqu'à la seconde guerre mondiale. Même si la réassurance non-proportionnelle commença au début du *XX^e* siècle, il faudra du temps avant qu'elle ne se démocratise.

Les réassureurs étaient principalement des compagnies d'assurances qui s'échangeaient réciproquement des engagements car elles ne pouvaient pas aller sur des marchés extérieurs, les politiques de protectionnisme étant très forte.

C'est après la fin de la seconde guerre mondiale que des compagnies spécialisées en réassurance virent le jour. De plus, les traités de réassurance commencent à élargir de plus en plus leur secteur d'activité et les réassureurs sont donc de moins en moins dépendants du secteur maritime et du transport en général. Les compagnies de réassurances et les compagnies d'assurances qui développent des filières de réassurance se multiplient dès le début des années 60 et atteignent le nombre de 500 en 1970. Ces activités sont d'abord très concentrées dans les pays anglo-saxons du fait de la concentration du commerce international et de la langue qui est très répandue. Ensuite, afin de retenir une partie des primes cédées sur leur territoire, les pays développés commencent à inciter le développement de compagnies de réassurances sur leur sol.

À partir des années 90 et après deux décennies marquées par une forte sinistralité (sinistre de Tenerife par exemple) et une offre de réassurance plus que nécessaire, de nombreuses compagnies font faillite et d'autres sont rachetées par d'autres réassureur.

Le secteur de la réassurance deviendra par la suite très concentré et des grands groupes d'assurances comme Axa et Allianz développeront leur propre réassurance.

7.2 Objectifs de la réassurance

Les principaux objectifs de la réassurance sont :

- **Réduire l'impact des sinistres extrêmes** : Une compagnie d'assurance peut être amenée à faire face à des sinistres inhabituels en raison de leurs montants et/ou fréquences extrêmement élevés. La réassurance permet à ces cédantes de se protéger contre ces sinistres extrêmes, qui peuvent mettre à mal leur activité ;
- **Réduire les besoins de solvabilité** : Selon les règles locales, une compagnie d'assurance peut être sous la contrainte de règles prudentielles qui nécessitent des contreparties de solvabilité. Ainsi, la réassurance en jouant un rôle dans la réduction des besoins de solvabilité, permet à l'assureur d'améliorer sa situation vis à vis des autorités de contrôle ;
- **Permettre de démarrer une nouvelle branche** : Selon les cas, une compagnie d'assurance qui cherche à développer une nouvelle branche ou bien à s'implanter géographiquement dans un nouveau marché sur une branche existante se retrouve confrontée à un manque d'informations sur la sinistralité et plus généralement sur la gestion de la branche mais peut également ne pas avoir les fonds nécessaires ou bien entrer avec une stratégie de prix agressive afin de capter une partie des consommateurs. Dans ce cas, la réassurance permet à la compagnie d'assurance de développer ses activités tout en ayant transférée une partie de ses risques ;
- **Lisser les résultats sur plusieurs années** : Les contrats de réassurance fonctionnant très souvent sur une confiance mutuelle entre réassureurs et assureurs sont souvent reconduits

d'années en années et une relation de confiance s'installe. Ainsi, ces contrats lissent le résultat de la sinistralité sur plusieurs années ;

- **Permettre la souscription de risques CAT** : Certaines compagnies d'assurances voulant proposer des garanties CAT en complément des garanties initiales ou tout simplement proposer des garanties CAT à des industriels ont tout intérêt à faire appel à la réassurance pour mutualiser ces risques ;
- **Mutualiser à l'échelle internationale et diversification des risques** : Selon les types de risques souscrits, une mutualisation à l'échelle locale peut ne pas être suffisante et requiert une plus grande base de mutualisation. Les réassureurs, souscrivant généralement des risques dans le monde entier, se présentent comme des partenaires complémentaires de mutualisation. De plus, le réassureur permet de diversifier les risques car généralement il souscrit tous sortes de risques, allant de l'assurances habitation pour les particuliers à des assurances plus spécifiques comme l'aviation ou le maritime.

7.3 Marché de la réassurance

Le marché de la réassurance dans le monde est relativement faible au vu du marché de l'assurance, mais avec ses 326 milliards d'euros de primes en 2021, cela représente un marché de grande ampleur qui fait face à de nombreux défis.

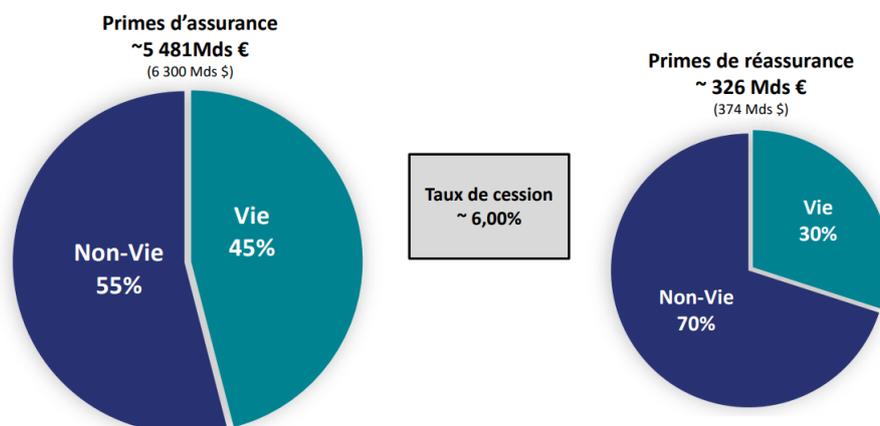


FIGURE 7.2 – Apref – Enquête Annuelle 2022 : Primes sur le marché de l'assurance et de la réassurance en 2021.

Comme il est possible d'observer sur les diagrammes ci-dessus (figure 7.2), il s'agit d'un marché plus concentré sur l'assurance non-vie que le marché assurantiel de base. En effet, les évènements de types CAT concernent en grande partie l'assurance non-vie et occupent une place majeure dans la souscription de la réassurance.

En outre, le marché de la réassurance a une particularité, celle d'avoir une cyclicité très marquée. La survenance d'évènements extrêmes qui affectent considérablement la charge globale des réassureurs à pour conséquence de faire monter les taux de primes effectués par ceux-ci pour remédier à ces pertes. Les taux de primes remontant, le marché devient plus profitable, ce qui favorise une croissance de

l'offre de réassurance (nouveaux entrants, croissances des souscriptions). Cette croissance de l'offre continue jusqu'à ce que le prix de marché concurrentiel soit atteint. Ainsi, certains acteurs sortent du marché pour cause de non-profitabilité, ce qui réduit les transactions de réassurances.

En constante évolution, le marché de la réassurance nécessite pour les acteurs d'anticiper les risques émergents pour proposer des contrats adaptés. De fait, les risques de types cyber ne représentent qu'une part minime du chiffre d'affaires des réassureurs mais font parties des nouveaux grands risques sur lesquels tous les réassureurs semblent prendre pleine mesure.

7.4 Différentes formes de réassurance

7.4.1 Formes contractuelles

Il existe trois formes contractuelles caractérisant la réassurance :

- **Traité** : Contrat portant sur un portefeuille homogène de risques avec un cadre défini à l'avance (marché, branche, période). La cession de la part de l'assureur et l'acceptation du réassureur sont obligatoires ;
- **Facultative** : Contrat portant sur un risque spécifique, le plus souvent individualisé. Sur proposition (non obligatoire) de la cédante, le réassureur peut refuser ou accepter un risque ;
- **Fac ob** ("Facultatives obligatoires") : Contrat qui place l'assureur dans une position semblable à la Facultative, mais qui pose une obligation d'acceptation pour le réassureur sur les risques proposés.

Une fois le type contrat défini, il existe deux formes techniques, la réassurance proportionnelle et la réassurance non-proportionnelle :

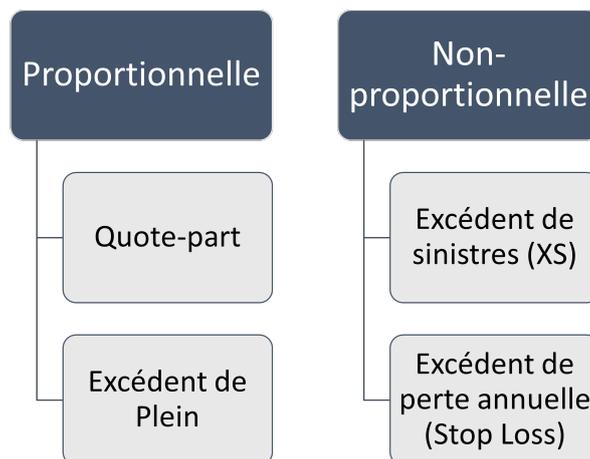


FIGURE 7.3 – Principales formes techniques de réassurance.

7.4.2 Formes techniques

Réassurance proportionnelle

La réassurance proportionnelle est une forme de réassurance qui se base sur l'exposition à priori du portefeuille. Un principe de proportionnalité sur l'exposition aux risques à priori et la prise en charges des sinistres à posteriori est mis en place. Les calculs sont ainsi effectués sur la base des engagements pris.

La Quote-Part

La Quote-Part¹, abrégée QP, est une forme de réassurance ayant pour principe la définition d'un pourcentage de cession d'engagements et de primes unique. Il s'agit de la forme la plus simple et la plus répandue de réassurance.

En pratique, le réassureur et la cédante se mettent d'accord sur un taux de QP fixe qui définira le contrat.

Exemple :

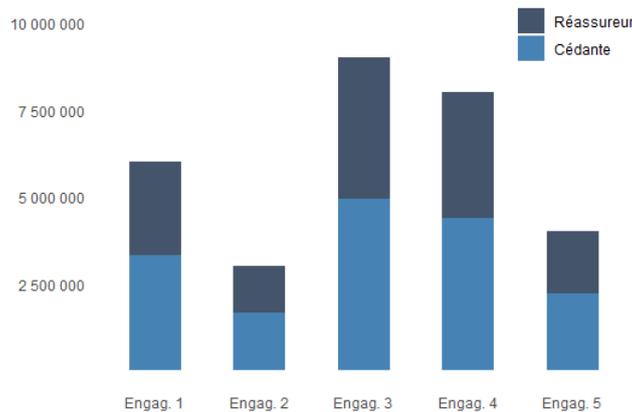


FIGURE 7.4 – Quote-Part de 45%.

45% des engagements et des primes sont cédés au réassureur.

La Quote-Part a pour avantage sa simplicité de mise en place, le partage du sort entre les deux parties et l'amélioration de la marge de solvabilité. Cependant, il en résulte un montant élevé de primes cédées et il n'y a pas de réduction de la volatilité.

L'excédent de Plein

L'excédent de Plein², se base également sur l'exposition. Un seuil de rétention appelé **Plein de**

1. *Quota-Share (QS)*
2. *Surplus*

conservation et un maximum sont définis pour la prise en charge par le réassureur. Le taux de cession des primes correspond à la part des engagements cédés sur la part des engagements totaux avant cession.

Exemple :

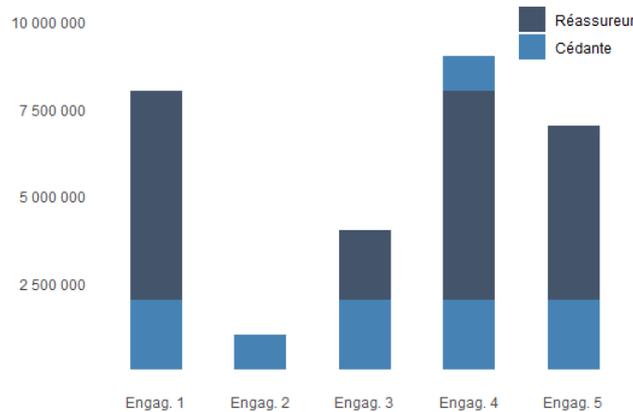


FIGURE 7.5 – Excédent de Plein avec un plein de 2M et un maximum à 8M.

Les engagements au-delà de 2M et en deçà de 8M sont cédés aux réassureurs. Pour la branche 4, le taux de prime cédée est de $\frac{8-2}{9} \simeq 67\%$.

Les principaux avantages de l'excédent de plein sont la réduction de volatilité qui permet de lisser les résultats et de diminuer ses besoins de solvabilité considérablement, et il permet également une cession de primes moins importante que la Quote-Part. Toutefois, la mise en place et la gestion d'un excédent de plein peut être plus compliqué du fait des connaissances nécessaires sur les engagements qui seront pris.

Réassurance non-proportionnelle

La réassurance non-proportionnelle ne repose pas sur les engagements à priori contrairement à la réassurance proportionnelle mais sur la sinistralité à posteriori. Les primes cédées associées à ces protections peuvent être calculées de différentes manières, que l'on verra par la suite.

L'excédent de sinistre

Un excédent de sinistre³ est une forme où l'on définit une rétention appelée **priorité** et une capacité appelée **portée** de tel sorte que le réassureur prend en charge la sinistralité à partir de la priorité et pour un montant maximal correspondant à la portée. La couverture excédent de sinistre peut être par risque ou bien par évènement, c'est à dire l'agrégation des sinistres lorsque l'évènement est le même pour ces derniers. Attention tout de même, la frontière de l'évènement doit être bien définie dans ce cas afin d'éviter toute interprétation litigieuse de la notion. On note *Portée XS Priorité* et

3. *Excess of Loss (XL)*

la formule déterminant la charge pour le réassureur est donnée par :

$$\min(\max(0; \text{sinistre} - \text{priorité}); \text{portée})$$

Cette garantie proposée par le réassureur peut être limitée en termes de renouvellement de la capacité. De ce fait, l'assureur se retrouve exposé très rapidement dès qu'il atteint un seuil de sinistres assez élevé et un besoin de rétablissement de la couverture après ces sinistres est nécessaires. Des clauses de reconstitutions sont alors négociées entre l'assureur et le réassureur moyennant une prime de reconstitution. Dans le cadre d'un traité en excédent de sinistres avec une reconstitution, le réassureur s'engage donc à régler au maximum deux fois la portée. Une particularité de ces clauses de reconstitution est que cette dernière s'applique dès qu'une partie de l'engagement est absorbée.

Exemple :

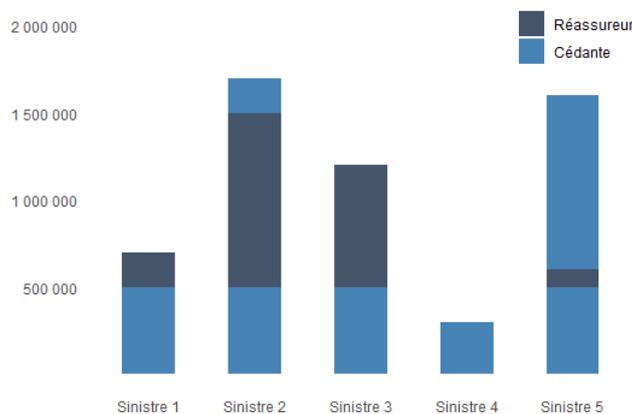


FIGURE 7.6 – Excédent de sinistre : 1M XS 0,5M avec une reconstitution

La partie du sinistre en 0,5M et 1,5M, si elle existe et dans la limite des reconstitutions, est à la charge du réassureur.

Par ailleurs, d'autres clauses existent concernant les traités en excédent de sinistres :

- La franchise globale⁴ est une rétention qui s'applique sur le montant total à charge pour le réassureur. C'est à partir de cette franchise que l'intervention du réassureur est effective ;
- Le plafond global⁵ est un montant fixé par les deux parties, correspondent au montant maximum qui sera à charge pour le réassureur sur la période de référence du traité ;
- La clause de participation aux bénéfices prévoit un taux de retour de primes à la cédante en cas de réalisation de bénéfices après prise en compte des charges sinistres et frais ;
- Une clause de "No Claim Bonus" prévoit également de retourner un pourcentage de la prime à la cédante si aucun sinistre n'a été pris en compte par la tranche.

L'excédent de sinistre fait partie des protections les plus utilisées notamment grâce à ses nombreux avantages. La réduction de la volatilité, la part de primes cédées qui est faible comparée à la réassurance proportionnelle et la gestion facilitée, du fait que celle-ci se déclenche uniquement si il y

4. Annual Aggregate Deductible (AAD)

5. Annual Aggregate Limit (AAL)

a des sinistres font de l'excédent de sinistre une protection très sollicitée. Cependant, un déphasage entre l'assureur et le réassureur a lieu sur la profitabilité et les primes sont fonctions de la sinistralité, ce qui peut faire augmenter les primes après plusieurs sinistres.

L'excédent de perte annuelle

Un excédent de perte annuelle est une extension de l'excédent de sinistre à une agrégation de certains risques et pour une période donnée (généralement une année). Cependant, dans la majorité des cas, l'excédent de perte annuelle s'exprime en fonction de ratio S/P à la place de montants pour la priorité et la portée. Une notation souvent utilisée est *Portée SL Priorité*.

Exemple :

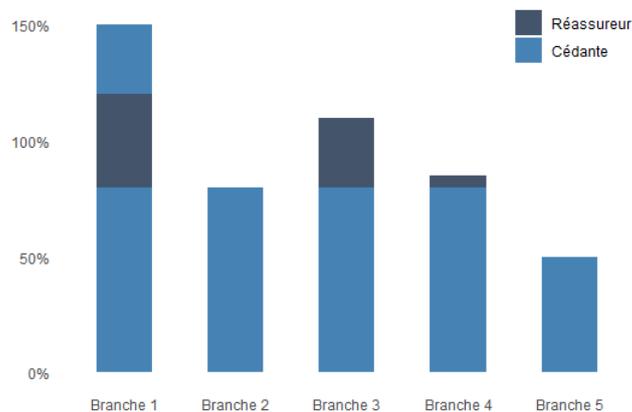


FIGURE 7.7 – Excédent de perte annuelle : 40% SL 80%

Comme pour l'excédent de sinistre, l'excédent de perte annuelle permet de réduire la volatilité du portefeuille et de céder une part plus petite des primes que la réassurance proportionnelle mais il permet en plus de lisser les résultats sur plusieurs années. De même, le déphasage entre l'assuré et le réassureur est également retrouvé.

7.5 Tarification en réassurance non-proportionnelle

A contrario de la réassurance proportionnelle, pour laquelle les primes cédées correspondent simplement (hors commissions de réassurance) à la part des engagements cédés sur la part des engagements totaux de la cédante avant réassurance, la réassurance non-proportionnelle, qui est fonction de la sinistralité, nécessite de prévoir celle-ci en avance. De ce fait, la réassurance non-proportionnelle nécessite des techniques de tarification plus poussées.

La particularité des structures de protection que fournit la réassurance non-proportionnelle, implique des techniques de tarification adaptées, et qui donc sont propres à cette dernière.

Par ailleurs, l'actuaire, qu'il soit du côté de la cédante, pour laquelle l'enjeu d'optimisation de sa réassurance est primordial, ou bien du côté du réassureur, qui a des objectifs de rentabilité, a pour mission de tarifier le plus justement possible le coût des protections de réassurance.

C'est pourquoi, à la poursuite de l'objectif d'optimisation de la réassurance initialement défini, cette étape de tarification apparaît primordiale.

Il existe trois types d'approches possibles en tarification des couvertures de réassurance non-proportionnelle :

- **Tarification individuelle** : Principe de tarifier selon les informations transmises par la cédante. Nécessite une confiance du réassureur sur la transmission des données par la cédante ;
- **Tarification marché** : Tarification sur une segmentation au niveau de la branche avec les informations que possède le réassureur (possibilité d'utiliser les informations que fournissent chacune des cédantes). Toutes choses égales par ailleurs, la prime est identique pour chaque cédante ;
- **Tarification combinée** : Il s'agit d'une forme de tarification combinant les deux méthodes précédentes en leur donnant des poids. La théorie de la crédibilité, constitue le fondement de la tarification combinée.

Une fois l'approche définie par l'actuaire, celui-ci a le choix d'utiliser des techniques sur l'historique de sinistralité ou bien l'exposition.

7.5.1 Tarification sur l'historique de sinistralité

La tarification sur l'historique de sinistralité, nécessite pour l'actuaire de disposer de données fiables et couvrant un historique suffisamment grand afin que l'estimation des coûts soit la plus précise possible. En effet, une hypothèse forte est appliquée ici, que la sinistralité future se comportera de la même manière que la sinistralité passée.

Les trois méthodes suivantes sont les plus répandues dans la réassurance :

- Le "**burning cost**", qui se définit comme le ratio de l'espérance de la sinistralité conditionnellement à la prise en charge de celle-ci par le traité non-proportionnel par rapport à l'assiette prime, est une méthode basée sur la moyenne pondérée des sinistres historiques à charges pour le réassureur.

De façon formalisée, cela se présente pour un traité en excédent de sinistre $\underline{c} \underline{X}_r$ sous la forme suivante :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \min(\max(x_{i,j} - r; 0); c)}{\text{assiette}_i}$$

Avec $x_{i,j}$ le j-ième sinistre de l'année i et assiette_i l'assiette de prime de l'année i.

En posant EPI_{n+1} ⁶, l'assiette de prime pour l'année à tarifier, la prime pure est donc : $\text{burning cost} \times EPI_{n+1}$

6. *Estimated Premium Income*

- Les **modèles probabilistes**, qui assignent des lois de probabilités à la sinistralité à charge de la priorité.

Il s'agit de modéliser la fréquence des sinistres par une variable aléatoire N et la sévérité par une variable aléatoire X , toutes deux indépendantes. De cela, découle le montant à charge du réassureur décrit par la variable aléatoire S_N . La prime pure est alors donnée par $\mathbb{E}(S_N)$.

Soit Y la variable aléatoire décrivant la sévérité à charge du réassureur pour un traité en excédent de sinistre c XS r . Alors, celle-ci s'exprime par :

$$c\mathbb{1}_{X>r+c} + (X - r)\mathbb{1}_{r\leq X\leq r+c}$$

L'espérance de sinistralité à charge de la tranche s'obtient alors par :

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N Y_i\right) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(Y)$$

avec :

$$\mathbb{E}(Y) = c\mathbb{P}(X > r + c) - r\mathbb{P}(X \geq r + c) + \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{r\leq X\leq r+c})$$

- Les **méthodes par simulations stochastiques**, consistent à calculer la sinistralité à charge pour la réassurance non-proportionnelle non par des formules fermées mais par des tirages aléatoires. Divers logiciels sont utilisés dans le marché de l'assurance et de la réassurance pour effectuer ces modèles. Il est également possible de combiner ces tirages avec les modèles probabilistes présentés ci-dessus, ce qui est fréquemment le cas.

7.5.2 Tarification sur l'exposition

Lorsque les données sur l'historique ne sont pas fiables ou représentatives du futur de la cédante ou bien que l'exposition se révèle comme un facteur influençant considérablement la sinistralité des cédantes, la tarification par exposition se présente par conséquent comme une meilleure solution.

Cette méthode consiste pour le réassureur à calculer la proportion de la prime qu'il va demander à l'assureur contre l'exposition qu'il prend, c'est à dire, les potentiels sinistres. Il n'existe pas de méthodes types, c'est généralement selon des méthodes que définissent les réassureurs en internes selon les éléments qu'ils jugent relevant de l'exposition de leur assurées et donc aussi selon les branches concernées.

7.5.3 Indicateurs d'efficacité des tranches

Il existe deux indicateurs régulièrement utilisés dans la réassurance afin de mesurer à quel point les tranches d'un traité en excédent de sinistres sont touchées.

- La **probabilité d'attachement** de la tranche, désigne la probabilité que la priorité de la tranche soit atteinte par un sinistre ;
- La **probabilité de dépassement** de la tranche, désigne la probabilité que la tranche soit entièrement consommée une première fois.

Ces deux indicateurs, permettent d'obtenir des informations sur la façon dont sont utilisées ces tranches et définissent des termes numériques essentiels à l'étude de ces tranches.

La théorie de la réassurance et le cadre de l'optimisation définis, l'application de la quête de l'objectif d'optimisation est ensuite effectuée.

Chapitre 8

Application : Optimisation de la réassurance

8.1 Contexte et appétence au risque

Après avoir introduit la réassurance et décrit les différents outils dont une société d'assurance dispose pour se protéger à son tour des risques, le mémoire visera à utiliser ces outils afin d'optimiser les protections de la société d'assurances. Dans un premier temps, la structure de réassurance actuelle de RA&S se constitue par la forme suivante :

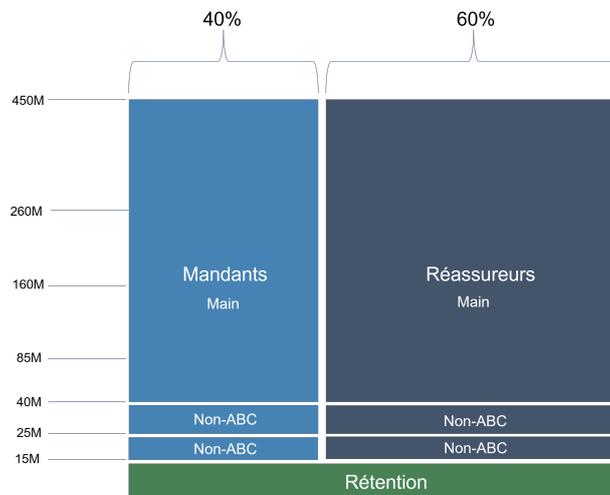


FIGURE 8.1 – Programme de réassurance actuel

La structure est composée d'une QP de 60% de cession et six tranches de XS qui s'appliquent à 100%. Concernant les tranches en XS, les deux premières sont conditionnelles au segment de l'évènement, il s'agit de tranches avec des niveaux relativement faible pour les évènements appartenant au segment Non-ABC. Ensuite, s'appliquent les quatre tranches suivantes quel que soit le segment. Il s'agit ici donc d'une protection sur l'ensemble des lignes d'activités simultanément.

Une fois le programme modélisé et les simulations effectuées, on obtient les probabilités d'attachements et de dépassement de ces tranches.

Il existe deux types de tranches, les tranches travaillantes, qui sont des tranches régulièrement touchées par des événements et les tranches non-travaillantes, très rarement touchées par la sinistralité. Ces dernières tranches, posent ainsi un problème de tarification. Il est en effet difficile d'utiliser des techniques par expérience pour la cotation. Si les données par exposition sont disponibles, alors il s'agit de la solution privilégiée. Or, celles-ci étant rarement disponibles, une cotation se basant sur la capacité est souvent effectuée. Cependant, ce type de cotation possède généralement une prime plus élevée les récupérations tarifées par simulations car l'incertitude pour le réassureur est élevée.

	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3	Tranche 4
Probabilité d'attachement	17,93%	3,24%	0,53%	0,50%
soit en années	5,6 ans	30,8 ans	187,5 ans	200,0 ans
Probabilité de dépassement	3,44%	0,53%	0,50%	
soit en années	29,0 ans	187,5 ans	200,0 ans	

TABLE 8.1 – Probabilités d'attachement et de dépassement des tranches principales

Les tranches deux à quatre ne sont que très rarement touchées et se comportent principalement comme des tranches CAT. La très grande volatilité par laquelle est caractérisée le secteur de l'assurance aviation et l'incertitude qui est marquée par une expérience faible en comparaison avec d'autres secteurs assurables (automobile, habitation), impliquent qu'une appétence au risque qui est qualifiée d'averse est préconisée. Un niveau de protection au-delà des scénarios CAT est demandée. Ces tranches, de montant très élevées, n'étant pas régulièrement touchées, ne peuvent donc que très difficilement être tarifées par l'expérience ou l'exposition. De ce fait, le marché de la réassurance tarifie ces tranches par des méthodes tels que le *Rate on Line (RoL)* qui se basent majoritairement sur les portées.

Les enjeux de cette étude sont donc d'optimiser le taux de cession en Quote-Part et la priorité de la première tranche du traité en excédent de sinistre. Les trois tranches supérieures étant cotées en RoL, celles-ci seront modélisées comme fixes.

Dans le cadre de l'application des exigences en termes de définition de l'appétence au risque de l'entreprise, découlent des indicateurs d'efficacité de la réassurance. Les trois indicateurs suivants sont utilisés pour l'optimisation.

- La rentabilité de la souscription : le résultat technique par unité de primes brutes acquises ;
- Le risque à 200 ans : le quantile 99,5% de la distribution des pertes ;
- Le minimum de primes acquises après cession à la réassurance.

	Indicateurs d'efficacité
Rentabilité	$\geq 1,0\%$
Var 99,5%	$\leq 50\,000\,000$
Primes acquises minimums	$\geq 70\,000\,000$

TABLE 8.2 – Indicateurs d'efficacité de l'optimisation de la réassurance

L'objectif de l'optimisation sera donc de chercher le couple de protections qui maximise la rentabilité tout en veillant à ce que la VaR à 99,5% soit inférieure à 50 000 000 \$ et que le montant des primes nettes acquises soit supérieur à 70 000 000 \$. Dans la suite, des sensibilités sur la QP sans prise en compte du XS, puis en le prenant en compte et vice-versa seront effectuées.

De plus, la cotation de ce traité en excédent de sinistre est effectuée selon la formule suivante :

$$P = \frac{\mu + 15\% * (\sigma)}{1 - 10\%}$$

avec μ la moyenne des récupérations de la tranche et σ l'écart-type correspondant.

Il s'agit d'une prime chargée sur l'écart-type avec prise en compte de frais à hauteur de 10%.

8.2 Sensibilités sur la Quote-Part

Des sensibilités sur le taux de cession en Quote-Part sont effectuées. Dans un premier temps, la modélisation du compte de résultat est lancée sans prendre en compte le traité en excédent de sinistre. Il s'agit ici d'un cas simple, visant à rappeler les résultats attendus d'un traité en Quote-Part.

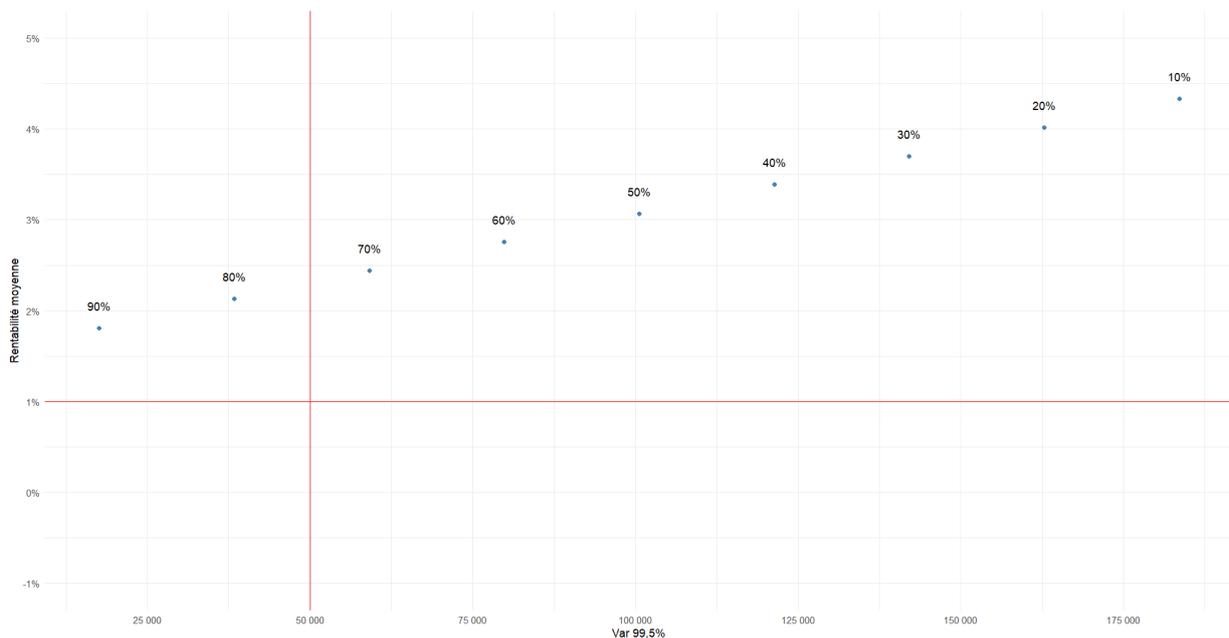


FIGURE 8.2 – Sensibilités sur le traité QP seul

Comme attendu pour ce type de couverture, la rentabilité et le risque sont positivement corrélées, cela est représenté par une droite. Plus le taux de cession diminue, plus la rentabilité et le risque augmentent. En effet, en augmentant le taux de cession, la compagnie transfère une partie plus importante de ces engagements et diminue ces deux indicateurs dans un environnement de résultats positifs. Une perte proportionnelle est ainsi effectuée sur ces résultats positifs diminuant ainsi la

rentabilité. De la même façon, le risque diminue proportionnellement avec la cession.

Compte tenu de la structure de réassurance actuelle, prenant en compte le traité en excédent de sinistre fixé, les sensibilités sur la QP donnent les résultats suivants.

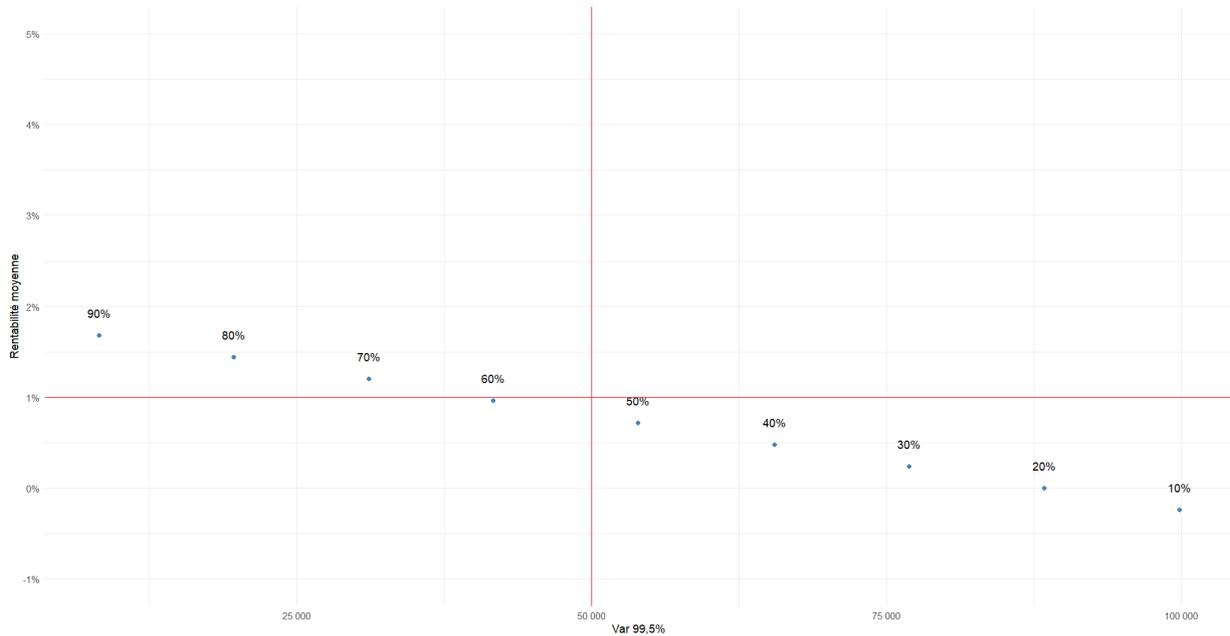


FIGURE 8.3 – Sensibilités sur le traité QP à XS fixé

Dans ce cas, la droite représentant le couple Rentabilité/Risque voit son coefficient directeur changer de signe. Cela signifie que plus le taux de cession est élevé plus la rentabilité augmente et le risque diminue. La différence avec la version sans prise en compte du XS, se situe sur la rentabilité. En effet, cela vient du fait que les protections du type excédent de sinistre sont onéreuses, et coûtent plus que la moyenne des récupérations de la tranche. Ceci s'explique par la grande volatilité et l'incertitude autour de la sinistralité touchant ces tranches. Cela est d'autant plus marqué dans l'assurance aviation, pour laquelle les primes de réassurance sont très élevées.

Les couples satisfaisant les indicateurs de rentabilité et de risques cèdent une partie importante des primes acquises, se trouvant ainsi en dessous du seuil défini. Aucun couple de paramètres ne satisfait donc ces trois indicateurs.

8.3 Sensibilités sur l'Excédent de sinistre

Cette section de l'étude vise à examiner le comportement du portefeuille en fonction de la priorité de la première tranche du traité en excédent de sinistre. Pour rappel, l'excédent de sinistres, est une couverture protégeant la cédante contre la volatilité et l'incertitude autour de sa ligne d'activité à contrario de la Quote-Part qui protège proportionnellement la cédante sur toute la distribution des sinistres. Des sensibilités par pas de cinq millions sont effectuées ci-dessous.

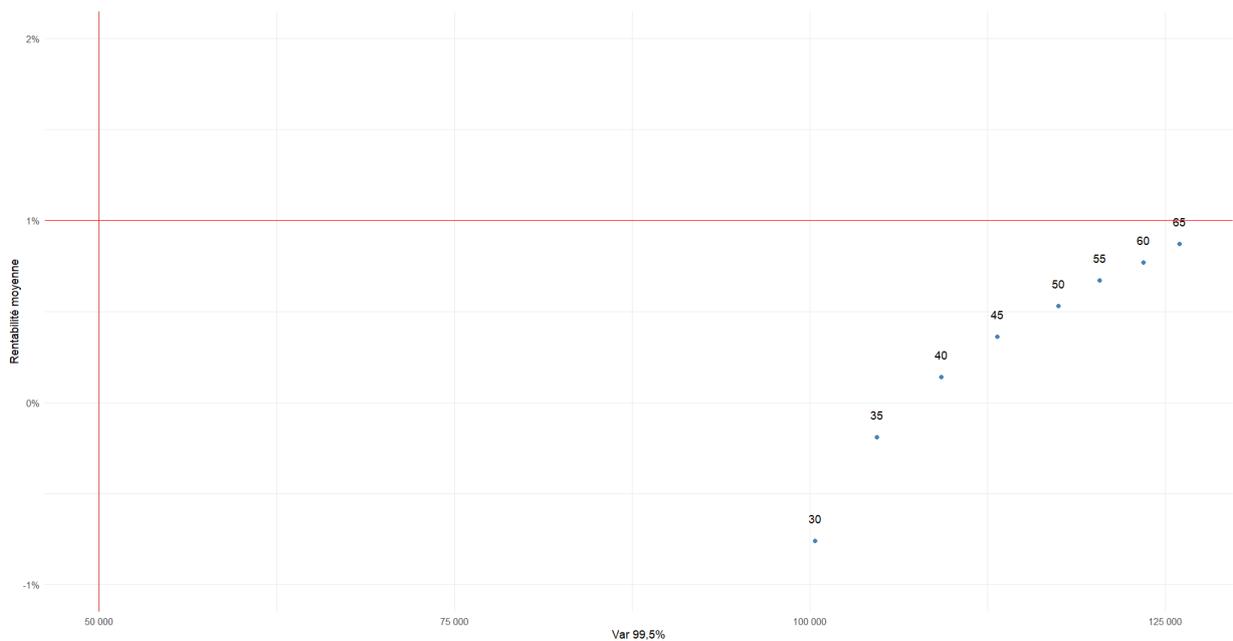


FIGURE 8.4 – Sensibilités sur le traité XS seul

Naturellement, plus la priorité est basse et donc la capacité augmente, plus le risque diminue. La capacité s'élargissant par le bas implique que la tranche récupère plus de sinistres et à des niveaux où la fréquence est plus élevée, diminuant ainsi significativement le niveau de risque. Cependant, de l'autre côté et par le poids de la volatilité les primes associées à ces tranches augmentent considérablement avec la baisse de priorité, rendant la rentabilité de moins en moins élevée.

La forme non horizontale de cette courbe vient principalement des frais liés à ce traité. En effet, plus la base est grande plus les frais sont importants. Ceci s'explique par la gestion des sinistres, car plus la tranche est travaillante plus les services de gestion auront des sinistres à traiter.

Des sensibilités sont aussi effectuées en tenant compte du traité de QP initial avec un taux de cession de 60%.

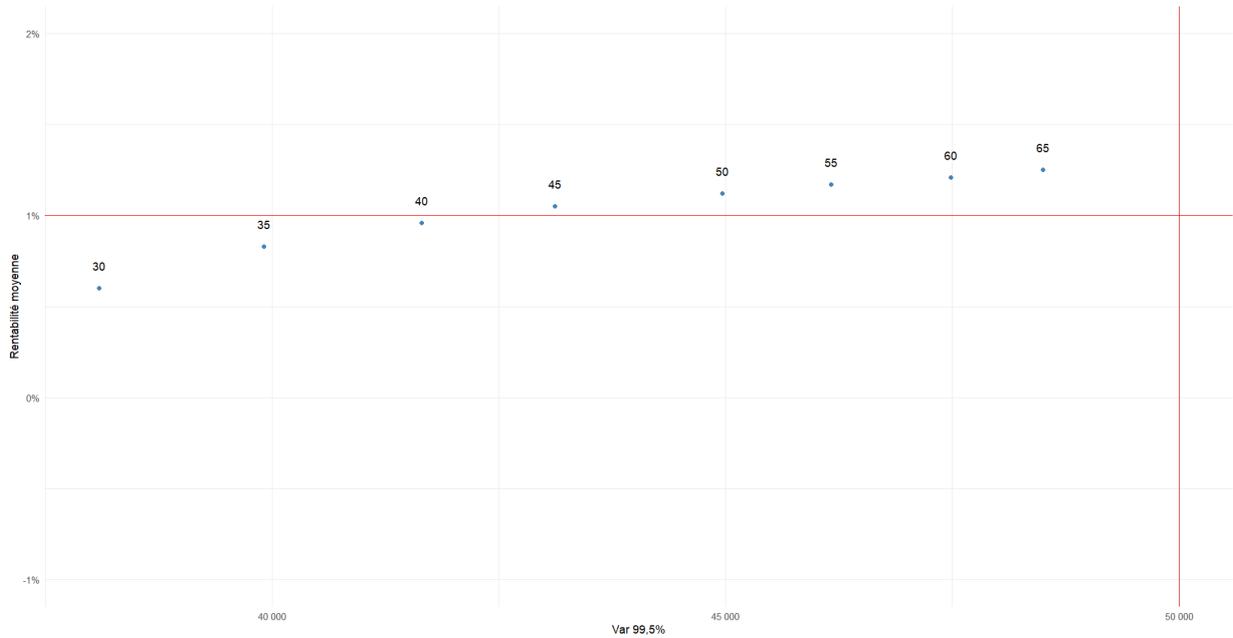


FIGURE 8.5 – Sensibilités sur le traité XS à QP fixée

En présence de la Quote-Part, le traité XS se comporte de la même façon généralement que sans celui-ci. Cela s'explique par la nature proportionnelle de la Quote-Part. Naturellement, il est possible d'observer une diminution du risque et de la volatilité.

Ainsi, les couples (60%, 45), (60%, 50), (60%, 55), (60%, 60) et (60%, 65) satisfont les trois indicateurs définis dans le cadre de l'appétence au risque. Dans la prochaine étape, une optimisation simultanée des paramètres est réalisée autour de ces valeurs afin d'obtenir la situation optimale.

8.4 Sensibilités simultanées sur les deux protections

Une fois les sensibilités sur les deux traités étudiées, l'optimisation simultanée des paramètres de ces traités est effectuée dans un objectif de trouver les couples satisfaisant les contraintes définies dans le cadre de la gestion des risques.

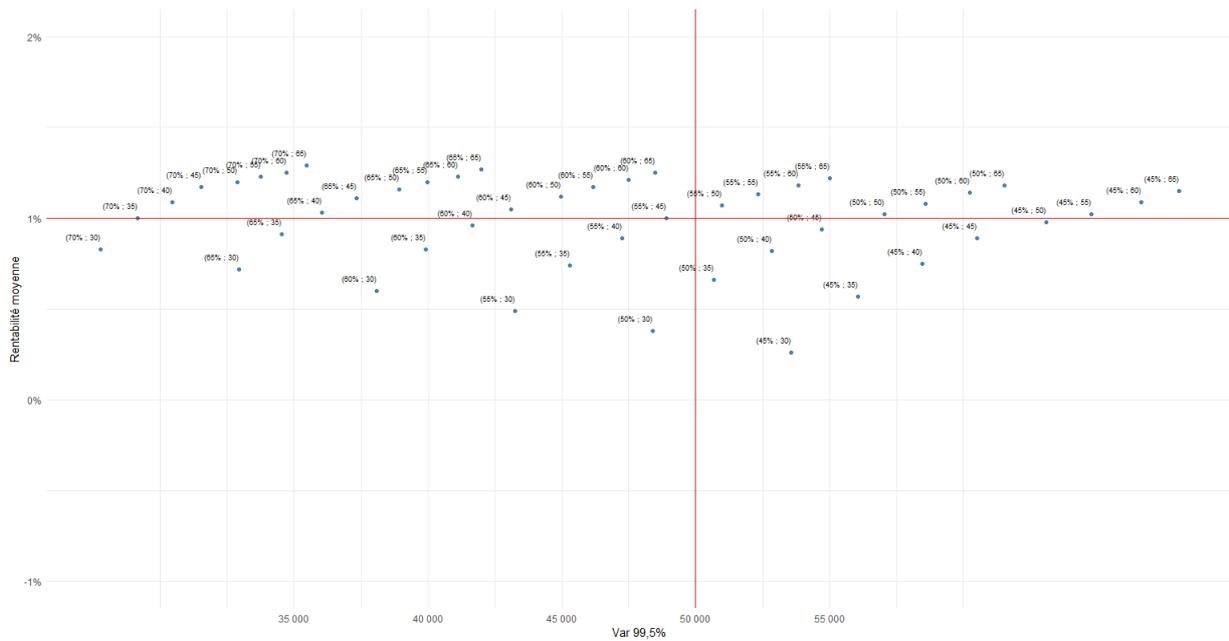


FIGURE 8.6 – Optimisation simultanée sur la QP et le XS

La figure ci-dessus permet de montrer que dix-neuf couples de paramètres satisfont les deux premières contraintes, de rentabilité et de risques.

La troisième contrainte, qui permet de définir un minimum de primes nettes que souhaite retenir RA&S, donne les couples suivants :

- (55%, 45) ;
- (60%, 45) ;
- (60%, 50) ;
- (60%, 55) ;
- (60%, 60) ;
- (60%, 65).

Ces trois contraintes respectant la définition de l'appétit au risque effectué plus tôt dans l'étude, le couple maximisateur du résultat technique par unité de prime brute acquise représente la situation avec une Quote-Part à 60% et une première tranche générale avec une priorité à 65M \$.

Cependant, il est malaisé d'obtenir précisément les protections recherchées sur le marché de la réassurance aviation en raison l'incertitude autour de ces risques. De ce fait, toute protection qui se rapproche des paramètres optimaux est adéquate. La protection utilisée actuellement par RA&S (60%, 40) est donc prudente vis à vis de ces interprétations.

Cette partie a introduit la réassurance et les formes ainsi que les méthodes utilisées, avant de passer à l'optimisation de la réassurance dans un cadre appliqué, pour comprendre les enjeux du Quote-Part et de l'excédent de sinistres. En outre, des solutions optimales ont pu être présentées et pourront servir de points de repères pour les prochains renouvellements.

Conclusion

Ce mémoire a permis tout d'abord de voir sur son ensemble les particularités de l'assurance aviation, représentant un petit marché dans le secteur assurantiel et pour lequel le nombre d'acteurs est faible. De ces particularités, des hypothèses fortes ont dû être prises afin de mener à bien l'étude, comme le regroupement de secteurs d'activités ou bien l'indépendance entre les acteurs.

De la préparation des données, à l'indexation de celles-ci et par le faible nombre de données à disposition, un travail de préparation conséquent a été effectuée pour rendre l'étude la plus réaliste possible et pouvoir interpréter justement les résultats.

La première étape, la modélisation de sinistralité, a permis de définir la méthodologie et les particularités abordés avant d'introduire la théorie des valeurs extrêmes.

L'inflation facteur important, d'autant plus avec les conjectures économiques actuelles, et qui est rarement étudié dans l'assurance aviation du fait de l'amélioration de la sinistralité globale grâce à l'amélioration des procédés, a été pris en compte tout au long de l'étude. Cela a permis de mettre en avant la différence positive de sinistralité associée à la prise en compte de celle-ci. Dégradant le résultat des contrats souscrits par RA&S mais améliorant la précision de l'étude.

Une rigueur particulière a été mise en place quant à l'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes, satisfaisant principalement des propriétés asymptotiques et pour laquelle le faible volume de données à disposition peut rendre l'interprétation difficile. C'est pourquoi, dans certains cas lorsque la lecture de graphique n'était pas claire il a été décidé de ne pas en tenir compte et de regarder plutôt les autres éléments graphiques ou numériques.

L'optimisation de la réassurance, dans la deuxième partie, a permis, tout en prenant en compte les rigidités des réassureurs sur le prix des protections du fait de grandes volatilités et incertitudes, de parcourir l'ensemble des solutions possibles et de faire ressortir des solutions dites plus optimales que le programme actuel.

Par ailleurs, ce mémoire a permis de prendre en main l'utilisation du logiciel ReMetrica, logiciel fonctionnant par tirages stochastiques et très utilisé dans le monde de l'Actuariat, notamment sur la réalisation d'un compte de résultat, par la modélisation de la sinistralité et de la réassurance. De plus, le langage de programmation R a servi à préparer les données et à calibrer les lois.

Ainsi, ce mémoire a pour but d'être une approche réaliste de l'assurance aviation, tenant compte

de ses particularités et en incorporant des outils mathématiques dans la modélisation, très peu utilisés dans ce type de secteur. Toutefois, des hypothèses fortes sont utilisées afin de mener à terme cette étude. De ce fait, les résultats sont à prendre avec précaution.

Une ouverture que l'on peut faire sur ce mémoire, porte sur la problématique de dépendance de certaines lignes d'activités et de certains assurés entre eux. En effet, il peut être intéressant de modéliser ces dépendances en lieu et place de quelques hypothèses très fortes sur le comportement similaire de certaines lignes d'activités prises. Une étude des dépendances avec des copules pour prendre en compte toute sorte de dépendance serait une voie d'amélioration.

Table des figures

1	Illustration de la théorie des valeurs extrêmes	6
2	Optimisation simultanée sur la QP et le XS	7
3	Illustration of the extreme value theory	11
4	Simultaneous optimisation on the QS and the XL	13
1.1	Évolution du nombre d'avions	19
1.2	Directive Solvabilité 2	21
2.1	Segments concernés par l'étude de la sinistralité grave	25
2.2	Évolution du marché de l'aviation	26
3.1	Répartition des primes par activités	28
3.2	Schémas descriptifs de la prise en compte de l'inflation sur la sévérité des sinistres.	30
4.1	Triangle de développement des sinistres cumulatifs	32
4.2	Fréquence des sinistres graves par activité	39
5.1	Distribution des lois de valeurs extrêmes généralisées	43
5.2	Illustration de la théorie des valeurs extrêmes	45
7.1	Schéma descriptif du transfert de risques.	58
7.2	Primes sur le marché de l'assurance et de la réassurance en 2021	60
7.3	Principales formes techniques de réassurance.	61
7.4	Quote-Part de 45%.	62
7.5	Excédent de Plein avec un plein de 2M et un maximum à 8M.	63
7.6	Excédent de sinistre : 1M XS 0,5M avec une reconstitution	64
7.7	Excédent de perte annuelle : 40% SL 80%	65
8.1	Programme de réassurance actuel	69
8.2	Sensibilités sur le traité QP seul	71
8.3	Sensibilités sur le traité QP à XS fixé	72
8.4	Sensibilités sur le traité XS seul	73
8.5	Sensibilités sur le traité XS à QP fixée	74
8.6	Optimisation simultanée sur la QP et le XS	75
A.1	Tests - Fréquence	I
A.2	Seuil des extrêmes - Compagnies aériennes et cargos	II

A.3	Seuil des extrêmes - Constructeurs et aéroports	II
A.4	Seuil des extrêmes - Combinés	III
A.5	Seuil des extrêmes - Aviation Générale	III
A.6	Tests - Loi centrale	IV
A.7	Tests - Queue de distribution	V

Liste des tableaux

1.1	Lignes d'activités	20
3.1	Résumé des données sinistres	28
6.1	Charge modélisée de la sinistralité attritionnelle.	52
6.2	Résultats du calibrage de la fréquence	53
6.3	Résultats du choix des seuils	54
6.4	Résultats du calibrage de la loi centrale	54
6.5	Résultats du calibrage de la queue de distribution	55
6.6	Charge modélisée de la sinistralité grave	55
6.7	Charge modélisée de la sinistralité grave	55
6.8	Sinistralité modélisée du portefeuille à la part LRA	56
8.1	Probabilités d'attachement et de dépassement des tranches principales	70
8.2	Indicateurs d'efficacité de l'optimisation de la réassurance	70

Bibliographie

Articles et présentations

- [2] Laurent GARDES. “Théorie des valeurs extrêmes”. In : (2020).
- [5] Pierre-Olivier GOFFARD. “Modélisation Charge Sinistre M2 Actuariat”. In : (2019).
- [6] Marie KRATZ. “Extreme Value Theory - Theory and Application to Risk Management”. In : (2019).
- [7] Xavier LAUREILLE, Pascale QUENNELLE et Mickael ITTAH. “100% Actuaires & 100% Data Science - Détermination des seuils de sinistres graves et optimisation de la réassurance”. In : (2019).
- [8] Xu ZHAO et al. “A New Parameter Estimator for the Generalized Pareto Distribution under the Peaks over Threshold Framework”. In : (2019).
- [10] ACPR - Banque de FRANCE. “Notice Solvabilité II - EProvisions techniques (y compris mesures « branches longues »)”. In : (2015).
- [11] Jérôme ISENBART. “Solvabilité II et Réassurance - Journées d’études IARD - Le Mans”. In : (2015).
- [12] Anis BORCHANI. “Statistiques des valeurs extrêmes dans le cas de lois discrètes.” In : (2010).
- [16] Marie F. KRATZ et Sidney I. RESNICK. “The QQ estimator and heavy tails.” In : (1995).
- [17] A. L. M. DEKKERS, J. H. J. EINMAHL et L de HAAN. “A moment estimator for the index of an extreme-value distribution”. In : (1989).

Littérature

- [14] Jacques BLONDEAU et Christian PARTRAT. *La Réassurance - Approche technique*. 2003.
- [15] Stuart COLES. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. 2001.

Mémoires

- [1] Antoine PIERRE. *Modélisation de la sévérité des traités en excédent de sinistre, approche par la théorie des valeurs extrêmes*. 2021.
- [3] Léa GUILLOT. *Construction d’un outil d’optimisation de programmes de réassurance sous contrainte d’appétence au risque, en assurance maritime*. 2020.
- [9] Max RYDMAN. *Application of the Peaks-Over-Threshold Method on Insurance Data*. 2018.

Thèses

- [4] Oussama BAHI. “Théorie des Valeurs Extrêmes : Application au Calcul de Risques”. Université des frères Mentouri Constantine 1, 2019.
- [13] Gwladys TOULEMONDE. “Estimation et tests en théorie des valeurs extrêmes.” Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008.

Annexes

A	Calibrage des lois	I
A.1	Fréquence	I
A.2	Sélection du seuil des extrêmes	II
A.3	Loi centrale	IV
A.4	Queue de distribution	V
B	Résultats de l'optimisation de la réassurance	VI
B.1	Quote-Part	VI
B.2	Excédent de sinistre	VI
B.3	Optimisation simultanée	VII

Annexe A

Calibrage des lois

A.1 Fréquence

La fréquence est calibrée à l'aide du test de Kolmogorov-Smirnov. La loi ayant la p-valeur la plus élevée est retenue à condition que celle-ci soit supérieure à 0,05.

En effet, une erreur de 5% maximum est admise.

Distribution	P-valeur KS	Interprétation KS
Poisson	0,803	Non rejet
Binomiale négative	< 2,2e-16	Rejet

(a) Compagnies aériennes et cargos

Distribution	P-valeur KS	Interprétation KS
Poisson	0,342	Non rejet
Binomiale négative	0,605	Non rejet

(b) Constructeurs et aéroports

Distribution	P-valeur KS	Interprétation KS
Poisson	0,992	Non rejet
Binomiale négative	< 3,1e-06	Rejet

(c) Combinés

Distribution	P-valeur KS	Interprétation KS
Poisson	0,349	Non rejet
Binomiale négative	< 4.9e-06	Rejet

(d) Aviation Générale

FIGURE A.1 – Tests - Fréquence

A.2 Sélection du seuil des extrêmes

La sélection du seuil des extrêmes est effectuée en deux étapes :

- Observation de la forme du graphique Quantiles-Quantiles de Pareto afin d'obtenir un indice sur l'appartenance ou non de la queue de distribution au domaine d'attraction de Fréchet ;
- Utilisation des trois autres graphiques pour l'estimation du seuil en sachant que la méthode de Hill n'est valable seulement si la queue de distribution appartient au domaine d'attraction de Fréchet.

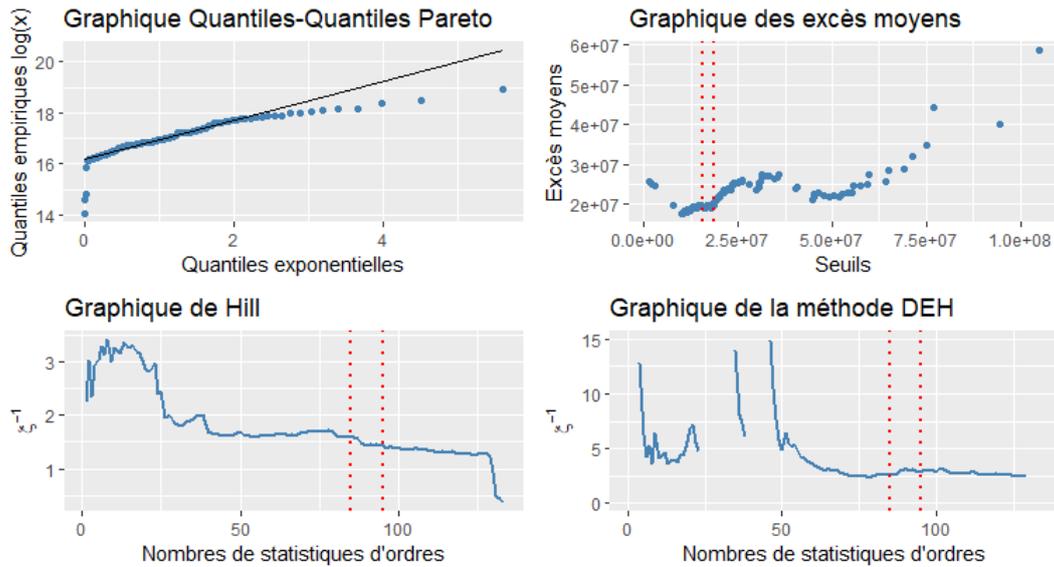


FIGURE A.2 – Seuil des extrêmes - Compagnies aériennes et cargos

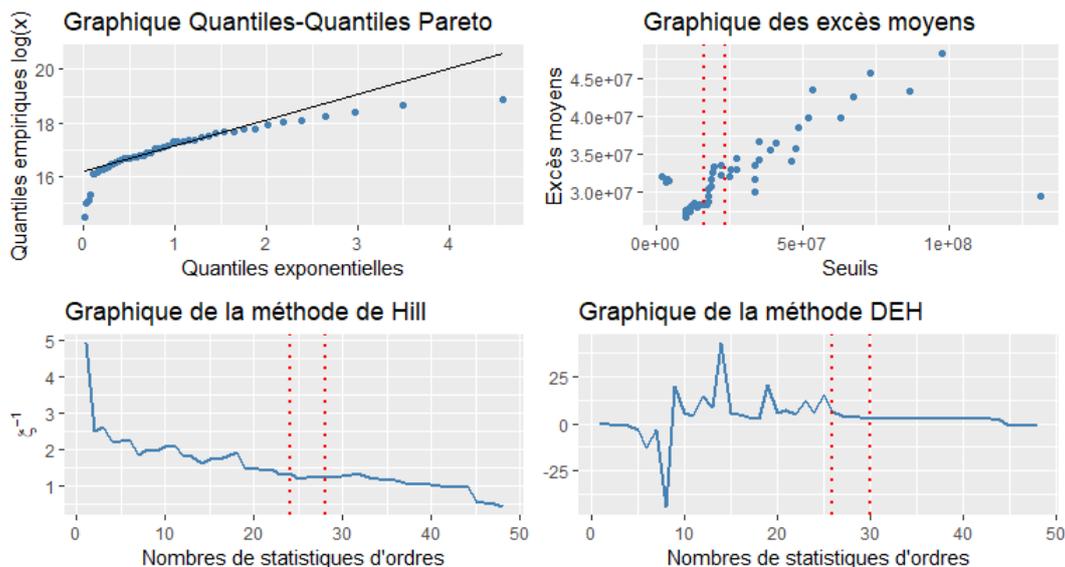


FIGURE A.3 – Seuil des extrêmes - Constructeurs et aéroports

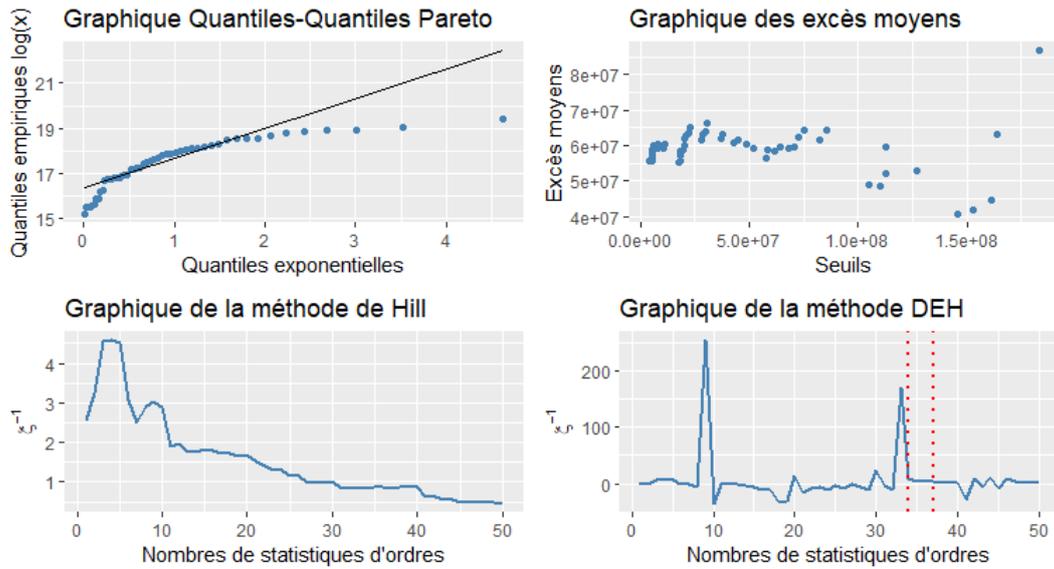


FIGURE A.4 – Seuil des extrêmes - Combinés

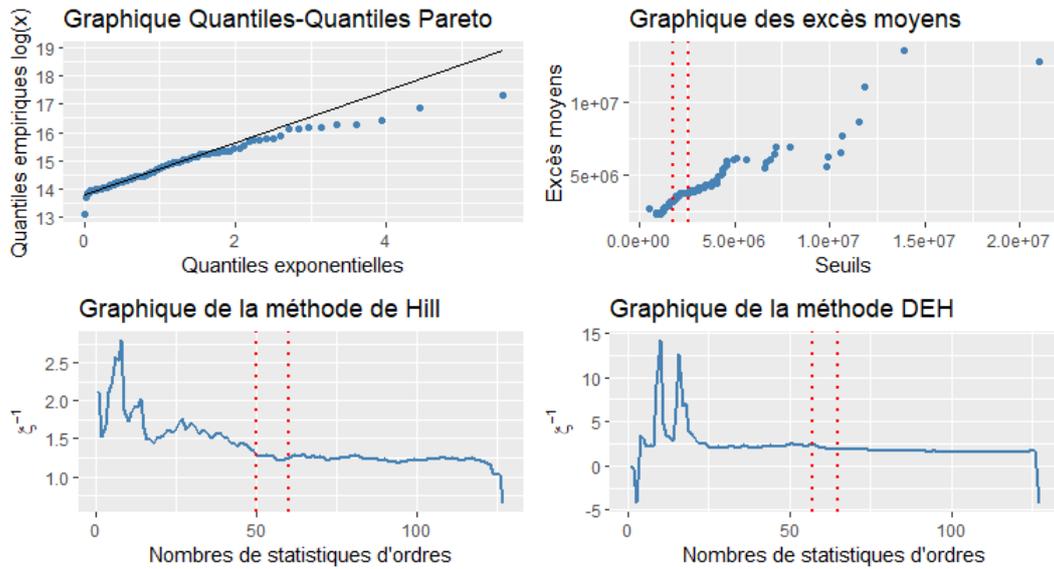


FIGURE A.5 – Seuil des extrêmes - Aviation Générale

A.3 Loi centrale

Pour la calibration de la loi centrale, les paramètres sont estimés pour chaque loi candidate à partir de la méthode du maximum de vraisemblance.

Puis, la visualisation graphique est effectuée pour avoir une première idée de la loi sous-jacente. Enfin, les tests de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson Darling sont utilisés afin de choisir la loi optimale.

Distribution	P-valeur KS	Interprétation KS	P-valeur AD	Interprétation AD
Exponentielle	0	Rejet	0	Rejet
Normale	0,015	Rejet	0,033	Non rejet
Log-Normale	0	Rejet	0	Rejet
Gamma	0	Rejet	0	Rejet
Pareto	0	Rejet	0	Rejet
Weibull	0,088	Non rejet	0,077	Non rejet

(a) Compagnies aériennes et cargos

Distribution	P-valeur KS	Interprétation KS	P-valeur AD	Interprétation AD
Exponentielle	0,002	Rejet	0,012	Rejet
Normale	0,798	Non rejet	0,568	Non rejet
Log-Normale	0,066	Non rejet	0,095	Non rejet
Gamma	0,186	Non rejet	0,176	Non rejet
Pareto	0	Rejet	0	Rejet
Weibull	0,659	Non rejet	0,348	Non rejet

(b) Constructeurs et aéroports

Distribution	P-valeur KS	Interprétation KS	P-valeur AD	Interprétation AD
Exponentielle	0,077	Non rejet	0,104	Non rejet
Normale	0,315	Non rejet	0,269	Non rejet
Log-Normale	0,269	Non rejet	0,384	Non rejet
Gamma	0,245	Non rejet	0,315	Non rejet
Pareto	0	Rejet	0	Rejet
Weibull	0,277	Non rejet	0,320	Non rejet

(c) Combinés

Distribution	P-valeur KS	Interprétation KS	P-valeur AD	Interprétation AD
Exponentielle	0	Rejet	0	Rejet
Normale	0,246	Non rejet	0,485	Non rejet
Log-Normale	0,817	Non rejet	0,591	Non rejet
Gamma	0,589	Non rejet	0,651	Non rejet
Pareto	0	Rejet	0	Rejet
Weibull	0,183	Non rejet	0,332	Non rejet

(d) Aviation Générale

FIGURE A.6 – Tests - Loi centrale

A.4 Queue de distribution

Pour la calibration de la queue de distribution, les paramètres sont estimés pour chaque loi candidate à partir de la méthode du maximum de vraisemblance.

Puis, la visualisation graphique est effectuée pour avoir une première idée de la loi sous-jacente. Enfin, les tests de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson Darling sont utilisés afin de choisir la loi optimale.

Distribution	P-valeur KS	Interprétation KS	P-valeur AD	Interprétation AD
GPD	0,609	Non rejet	0,616	Non rejet
GEV	0,223	Non rejet	0,068	Non rejet
Weibull	0,001	Rejet	0,006	Rejet

(a) Compagnies aériennes et cargos

Distribution	P-valeur KS	Interprétation KS	P-valeur AD	Interprétation AD
GPD	0	Rejet	0	Rejet
GEV	0,991	Non rejet	0,994	Non rejet
Weibull	0,447	Non rejet	0,357	Non rejet

(b) Constructeurs et aéroports

Distribution	P-valeur KS	Interprétation KS	P-valeur AD	Interprétation AD
GPD	0,987	Non rejet	0,985	Non rejet
GEV	0,977	Non rejet	0,960	Non rejet
Weibull	0,893	Non rejet	0,841	Non rejet

(c) Combinés

Distribution	P-valeur KS	Interprétation KS	P-valeur AD	Interprétation AD
GPD	0,915	Non rejet	0,970	Non rejet
GEV	0,767	Non rejet	0,906	Non rejet
Weibull	0	Rejet	0,004	Rejet

(d) Aviation Générale

FIGURE A.7 – Tests - Queue de distribution

Annexe B

Résultats de l'optimisation de la réassurance

Les résultats des tirages stochastiques aléatoires sont présentés dans les figures suivantes en fonction des trois indicateurs définis dans le cadre de la gestion des risques.

B.1 Quote-Part

Cession	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
Rentabilité	4,33%	4,02%	3,70%	3,39%	3,07%	2,76%	2,44%	2,13%	1,81%
Risque	183 578 783	162 830 488	142 082 194	121 333 900	100 585 605	79 837 311	59 089 016	38 340 722	17 592 428
Primes nettes	189 352 004	168 312 893	147 273 781	126 234 670	105 195 558	84 156 446	63 117 335	42 078 223	21 039 112

(a) QP sans XS

Cession	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
Rentabilité	-0,24%	0,00%	0,24%	0,48%	0,72%	0,96%	1,20%	1,44%	1,68%
Risque	99 792 535	88 353 824	76 915 112	65 476 401	53 915 876	41 649 417	31 087 179	19 672 830	8 258 482
Primes nettes	173 505 545	154 226 902	134 948 311	115 669 756	96 391 250	77 112 796	57 834 424	38 556 158	19 278 010

(b) QP avec XS fixé

B.2 Excédent de sinistre

Priorité	30	35	40	45	50	55	60	65
Rentabilité	-0,76%	-0,19%	0,14%	0,36%	0,53%	0,67%	0,77%	0,87%
Risque	100 354 559	104 713 525	109 236 163	113 166 895	117 490 859	120 382 856	123 441 823	125 972 786
Primes nettes	184 512 194	191 769 471	194 849 833	196 582 214	197 765 412	198 677 009	199 392 834	199 993 464

(a) XS sans QP

Priorité	30	35	40	45	50	55	60	65
Rentabilité	0,60%	0,83%	0,96%	1,05%	1,12%	1,17%	1,21%	1,25%
Risque	38 091 832	39 907 543	41 649 417	43 118 658	44 964 011	46 161 972	47 483 209	48 495 594
Primes nettes	73 803 027	76 706 512	77 939 033	78 632 213	79 105 649	79 470 415	79 756 856	79 997 172

(b) XS avec QP fixée

B.3 Optimisation simultanée

En vert, les couples de paramètres satisfaisant les trois indicateurs.

Cession QP	70%	65%	60%	55%	50%	45%
Priorité XS	30	30	30	30	30	30
Rentabilité	0,83%	0,72%	0,60%	0,49%	0,38%	0,26%
Risque	27 779 908	32 935 870	38 091 832	43 247 795	48 403 757	53 559 720
Primes nettes	55 351 885	64 577 436	73 803 027	83 028 657	92 254 316	101 479 990

(a) Priorité à 30M

Cession QP	70%	65%	60%	55%	50%	45%
Priorité XS	30	30	30	30	30	30
Rentabilité	1,00%	0,91%	0,83%	0,74%	0,66%	0,57%
Risque	29 141 690	34 524 616	39 907 543	45 290 469	50 673 395	56 056 321
Primes nettes	57 529 653	67 118 069	76 706 512	86 294 986	95 883 485	105 472 015

(b) Priorité à 35M

Cession QP	70%	65%	60%	55%	50%	45%
Priorité XS	30	30	30	30	30	30
Rentabilité	1,09%	1,03%	0,96%	0,89%	0,82%	0,75%
Risque	30 448 096	36 048 756	41 649 417	47 250 077	52 850 738	58 451 398
Primes nettes	58 454 101	68 196 557	77 939 033	87 681 530	97 424 046	107 166 573

(c) Priorité à 40M

Cession QP	70%	65%	60%	55%	50%	45%
Priorité XS	30	30	30	30	30	30
Rentabilité	1,17%	1,11%	1,05%	1,00%	0,94%	0,89%
Risque	31 530 550	37 332 171	43 118 658	48 896 558	54 715 248	60 515 065
Primes nettes	58 949 946	68 794 587	78 632 213	88 461 240	98 280 437	108 108 481

(d) Priorité à 45M

Cession QP	70%	65%	60%	55%	50%	45%
Priorité XS	30	30	30	30	30	30
Rentabilité	1,20%	1,16%	1,12%	1,07%	1,02%	0,98%
Risque	32 879 966	38 929 880	44 964 011	50 989 189	57 056 902	63 104 934
Primes nettes	59 304 877	69 208 792	79 105 649	88 993 855	98 872 173	108 759 391

(e) Priorité à 50M

Cession QP	70%	65%	60%	55%	50%	45%
Priorité XS	30	30	30	30	30	30
Rentabilité	1,23%	1,20%	1,17%	1,13%	1,08%	1,02%
Risque	33 755 976	39 967 075	46 161 972	52 347 676	58 577 050	64 786 217
Primes nettes	59 578 339	69 527 922	79 470 415	89 404 216	99 328 084	109 260 893

(f) Priorité à 55M

Cession QP	70%	65%	60%	55%	50%	45%
Priorité XS	30	30	30	30	30	30
Rentabilité	1,25%	1,23%	1,21%	1,18%	1,14%	1,09%
Risque	34 722 131	41 111 003	47 483 209	53 845 959	60 253 628	66 640 513
Primes nettes	59 793 082	69 778 527	79 756 856	89 726 463	99 686 101	109 654 711

(g) Priorité à 60M

Cession QP	70%	65%	60%	55%	50%	45%
Priorité XS	30	30	30	30	30	30
Rentabilité	1,29%	1,27%	1,25%	1,22%	1,18%	1,15%
Risque	35 462 439	41 987 527	48 495 594	54 994 004	61 538 290	68 061 349
Primes nettes	59 973 245	69 988 777	79 997 172	89 996 818	99 986 465	109 985 111

(h) Priorité à 65M